ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Звягин
Андрей Викторович

Разрешимость и качественное поведение решений начально–краевых задач и включений для вязкоупругих сред

01.01.02 Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Воронеж 2022

ОГЛАВЛЕНИЕ

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

Ω — ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$.

Q_T $= [0, T] \times \Omega$.

$L_p(\Omega)$ — множество всех измеримых функций $v : \Omega \to \mathbb{R}^n$, для которых конечна норма

$$\|v\|_{L_p(\Omega)} = \begin{cases} \left(\int_\Omega |v(x)|^p dx \right)^{1/p}, & 1 \le p < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Omega} |v(x)|, & p = \infty. \end{cases}$$

$W_p^s(\Omega)$ — пространство Соболева, состоящее из функций, принадлежащих $L_p(\Omega)$ вместе со всеми своими обобщенными производными порядка не выше чем s.

$L_p(0, T; X)$ — множество всех измеримых функций $v : [0, T] \to X$, принимающих значение в банаховом пространстве X, для которых конечна норма

$$\|v\|_{L_p(0,T;X)} = \begin{cases} \left(\int_0^T \|v(s)\|_X^p ds \right)^{1/p}, & 1 \le p < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}_{s \in [0,T]} \|v(s)\|_X, & p = \infty. \end{cases}$$

$W_p^s(0, T; X)$ — пространство Соболева, состоящее из функций $v : [0, T] \to X$, которые принадлежат $L_p(0, T; X)$ вместе со всеми своими обобщенными производными порядка s включительно.

$C_0^\infty(\Omega)$ — пространство функций на Ω со значениями в $\mathbb{R}^n$ класса C^∞ с компактным носителем, содержащимся в Ω.

$\mathcal{V}$ $= \{v : v \in C_0^\infty(\Omega),\ \mathrm{div}\, v = 0\}$ — подмножество соленоидальных функций пространства $C_0^\infty(\Omega)$.

H — замыкание $\mathcal{V}$ по норме пространства $L_2(\Omega)$.

V — замыкание $\mathcal{V}$ по норме пространства $W_2^1(\Omega)$ с нормой

$$\|v\|_V = \left(\int_\Omega \nabla v : \nabla v \, dx \right)^{1/2}.$$

$A : B$ $= \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}b_{ij}$, где $A = \{a_{ij}\}$, $B = \{b_{ij}\}$. Символ обозначает покомпонентное умножение матриц.

E^* — пространство сопряженное к пространству E.

$\langle f, v\rangle$ — значение функционала $f \in E^*$ на элементе $v \in E$.

Div A $= (\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial a_{1j}(t,x)}{\partial x_j}, ..., \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial a_{nj}(t,x)}{\partial x_j})$ — дивергенция тензора A.

v $= (v_1(t, x), \ldots, v_n(t, x))$ — вектор–функция скорости движения частицы среды.

θ $= \theta(t, x)$ — функция температуры среды.

p $= p(t, x)$ — функция давления.

f $= (f_1(t, x), \ldots, f_n(t, x))$ — плотность внешних сил.

g $= g(t, x)$ — источник внешнего тепла.

σ $= (\sigma_{ij})$ – девиатор тензора напряжений.

$\mathcal{E}(v)$ $= (\mathcal{E}_{ij}(v))$, $\mathcal{E}_{ij}(v) = \dfrac{1}{2}(\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial v_j}{\partial x_i})$ — тензор скоростей деформации.

$W(v)$ $= (W_{ij}(v))$, $W_{ij}(v) = \dfrac{1}{2}(\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j} - \dfrac{\partial v_j}{\partial x_i})$ — тензор завихренности.

$W_\rho(v)$ $= \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x-y)W(t, y)\,dy$, где $\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – гладкая функция с компактным носителем, такая что $\int_{\mathbb{R}^n} \rho(y)\,dy = 1$ и $\rho(x) = \rho(y)$ для x и y с одинаковыми евклидовыми нормами.

ν > 0 — вязкость среды.

$\varkappa$ > 0 — время ретардации (запаздывания) среды.

χ > 0 — коэффициент теплопроводности.

$\Gamma(\beta)$ — гамма–функция Эйлера, определяемая через абсолютно сходящийся интеграл $\Gamma(\beta) = \int_0^\infty t^{\beta-1}e^{-t}\,dt$.

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы и ее разработанность в литературе. Математические вопросы, возникающие при изучении гидродинамики, являются актуальной и быстро развивающейся областью исследований последние сто пятьдесят лет. При этом основное внимание математиков было уделено системе уравнений Эйлера, описывающей движение идеальной среды, и системе уравнения Навье–Стокса, описывающей движение вязкой ньютоновской жидкости. Самыми известными работами по данной тематике являются работы [99], [127], монографии [5], [38], [42], [60] и др.

Однако было замечено, что многие реальные среды, такие как полимеры, полимерные растворы и расплавы, эмульсии и суспензии, кровь и многое др. не подчиняются моделям классической гидродинамики. Такие модели называются «неньютоновскими средами». Впервые модели неньютоновской гидродинамики появились в XIX веке в работах механиков Дж. Максвелла, Кельвина и Фойгта и получили развитие в середине XX века в работах Дж. Г. Олдройта [134] (обзор по рассматриваемым средам приведен в работе [139]). В настоящее время уже имеется большое число моделей, описывающих разные классы таких сред.

Данная диссертация посвящена математическому исследованию начально–краевых задач для одного класса моделей неньютоновской гидродинамики, а именно, моделей движения вязкоупругих сред. Такие среды, как следует из названия, сочетают в себе свойства вязкости и упругости. В вязких средах вязкость полностью определяется значением сдвигового напряжения, в вязкоупругих же средах сдвиговое напряжение дает только треть информации об их реологических свойствах, а две другие трети — разность нормальных напряжений. Следует понимать, что изменение вязкости среды при варьировании внешних воздействий сопряжено с рядом гидродинамических и физико–химических процессов (ориентация частиц дисперсной фазы в потоке, разрушение–восстановление структурных связей между ними и т.п.) и всегда занимает какое-то время. Таким образом, пока деформации успевают следовать за напряжением, вязкоупругие свойства среды не проявляются, но при увеличении частоты внешних воздействий (или уменьшении подвижности макромолекул среды при снижении температуры) деформации начинают не успевать за воздействиями и в среде возникают релаксационные процессы (см. [14]).

Таким образом, **цели и задачи диссертационной работы** — для вязкоупругих моделей неньютоновской гидродинамики изучить ряд математических проблем, связанных с вопросами существования и поведения слабых решений.

Научная новизна — в силу своей сложности математические постановки задач для моделей неньютоновской гидродинамики на сегодняшний день не столь подробно изучены и существующие математические методы зачастую оказываются не столь эффективными для них. Таким образом, результаты исследований в данной диссертации являются серьезным новым шагом в этой области и могут быть развиты в других задачах. Тем не менее, изучаемым классом математических моделей занималось большое число известных ученых: Дж.Г. Олдройт, М. Ренарди, А.П. Осколков, О.А. Ладыженская, В.А. Павловский, В.В. Пухначев, К. Трусделл, С.Н. Антонцев, G.P. Galdi, P.L. Lions, E.S. Titi, J. Malek, K.R. Rajagopal и др.

Перейдем к описанию изучаемых в диссертации моделей. Во всей работе движение среды рассматривается в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Движение однородной несжимаемой среды с постоянной плотностью, в ограниченной области на отрезке времени $[0, T]$, $T > 0$, определяется системой дифференциальных уравнений в форме Коши (см., например, [17]):

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} + \mathrm{grad}\ p = \mathrm{Div}\ \sigma + f, \tag{1}$$

$$\mathrm{div}\ v = 0, \tag{2}$$

где $v = (v_1, ..., v_n)$ — вектор–функция скорости, p — функция давление среды, f — плотность внешних сил, $\sigma = (\sigma_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ — девиатор тензора напряжений, $\mathrm{Div}\ \sigma$ — дивергенция тензора σ, то есть вектор

$$\mathrm{Div}\ \sigma = \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \sigma_{1j}(t,x)}{\partial x_j}, \cdots, \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \sigma_{nj}(t,x)}{\partial x_j} \right).$$

Формально система (1)–(2) описывает течение всех видов жидкостей. Однако, число неизвестных этой системы больше числа уравнений. Для корректной постановки эту систему дополняют реологическим (определяющим) соотношением, которое обычно связывает между собой девиатор тензора напряжения σ и тензор скоростей деформации $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_{ij}(v))$, $\mathcal{E}_{ij}(v) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$, $i, j = \overline{1, n}$. Данные соотношения изучает наука «реология», которая включает в себя совокупность теоретических и экспериментальных методов исследования связи между механическим напряжением, действующим на тела, и деформацией последующих. Подробный обзор по современным реологическим соотношениям, возникающим в неньютоновской гидродинамике, приведен в монографии [58].

Математическое изучение системы уравнений (1)–(2) началось с рассмотрения реологического соотношения $\sigma = 0$. Эта система получила название — система уравнений Эйлера. Считается, что данная система описывает движение идеальной жидкости. Дальнейшее изучение системы уравнений (1)–(2) связано с реологическим соотношением $\sigma = 2\nu\mathcal{E}$, где $\nu > 0$ – вязкость среды. Эта система называется системой уравнений Навье–Стокса и описывает движение вязкой ньютоновской жидкости. Описанные соотношения относятся к «классической» гидродинамике.

В данной диссертации изучаются математические модели, относящиеся к неньютоновской гидродинамики. В частности, в диссертации исследуется математическая модель, описывающая движение нелинейно–вязких сред. Согласно гипотезе Стокса тензор напряжений в точке в данный момент времени полностью определяется скоростью деформации в той же точке и в тот же самый момент времени. Однако, данное соотношение не предполагает никаких ограничений, связанных с линейностью, но считается, что деформация, происходящая в какой-нибудь другой точке или в какой-нибудь другой момент времени, предшествующий рассматриваему, не оказывает влияния на значение напряжений. Последнее обстоятельство учитывается в моделях нелинейно–вязкоупругих сред. Исследование моделей с нелинейной вязкостью с одной стороны позволяет существенно расширить класс изучаемых сред, с другой стороны — существенно осложняет математические исследования таких начально–краевых задач. Заметим, в литературе было предложено много функций нелинейной вязкости (см. модели Оствальда, Прандтля, Эллиса и другие). В данной диссертации рассматривается естественный для реальных жидкостей вариант, предложенные профессором В.Г. Литвиновым (см. [43], [130]): $\sigma = 2\nu(I_2(v))\mathcal{E}$. Здесь тензор $I_2(v)$ определяется равенством

$$I_2^2(v) = \mathcal{E}(v) : \mathcal{E}(v) = \sum_{i,j=1}^{n} \mathcal{E}_{ij}^2(v).$$

Таким образом, рассматриваемые в диссертации модели на самом деле достаточно «близки» к задачам классической гидродинамики, но в тоже время имеют свои принципиальные трудности.

С одной стороны модели неньютоновской гидродинамики имеют схожесть с задачами классической гидродинамики, что было продемонстрировано на примере модели нелинейно–вязкой среды. С другой стороны, задачи неньютоновской гидродинамики имеют свою отличную структуру и природу происхождения. А именно, реологическое соотношение должно отвечать ряду общих требований к математической модели, основным из которых является максимальная близость получаемых с его помощью результатов реальным характеристикам среды при максимальной простоте самого уравнения, т.е. реологическое соотношение должно наиболее точно передавать зависимость скорости деформации среды от приложенных напряжений и иметь минимальное количество параметров. Один из способов определения реологического соотношения – это метод механических моделей. Рассматриваемую среду моделируют с помощью пробирок, пружинок и т.д. и производят необходимые вычисления. Разумеется, разные среды имеют разные механические модели и в результате расчетов получаются различные соотношения. Для рассматриваемого в диссертации класса неньютоновских сред, а именно для вязкоупругих сред, механическая модель представляет собой систему, состоящую из амортизатора и пружины, которые соединены параллельно (см. [44], [139]). При таком соединении деформация ограничена пределом растяжения пружины. Физический аналог такой системы — пористый упругий материал с твердой дисперсионной средой и жидкой дисперсной фазой (например, эластичная губка, пропитанная жидкостью). Общий вид реологического соотношения для вязкоупругих сред задается уравнением:

$$\sigma = 2\nu\mathcal{E} + 2\varkappa\dot{\mathcal{E}}, \tag{3}$$

где $\nu > 0$ – вязкость среды, $\varkappa > 0$ – время ретардации (запаздывания) среды, а $\dot{\mathcal{E}}$ – производная по времени тензора скоростей деформации.

Реологические соотношения вязкоупругих сред всегда содержат параметр времени. С математической точки зрения их можно разделить на две группы: дифференциальные, связывающие мгновенные значения напряжений с градиентом скорости среды, и интегральные, отражающие зависимость напряжений в среде от предыстории течения (см. [14]). В данной диссертации изучаются обе группы реологических соотношений для вязкоупругих сред. Первая группа соотношений для исследуемого класса вязкоупругих сред изучается в диссертации во второй части первой главы, во второй и третьей главах, а вторая группа изучается в первой части первой главы диссертации. Таким образом, диссертация охватывает различные математические постановки для вязкоупругих сред.

Заметим, что реологическое соотношение (3) содержит производную по времени тензора скоростей деформации. Однако метод механических моделей не указывает какую производную (частную, полную или какую-то специальную) надо брать в реальных процессах, где наряду со временем участвуют и точки области. Математические исследования данной модели начались с рассмотрением в реологическом соотношении (3) частной производной. Данное реологическое соотношение подробно описано в монографии [11]. Данная математическая модель (по аналогии для модели твердого тела) получила название — модель Фойгта и довольно полно была изучена известными математиками (А.П. Осколков, О.А. Ладыженская, Р.Темам, E.S. Titi и др. [35], [46], [48], [49], [72], [88], [97], [108], [109], [121], [122], [124],[125], [137], [149]).

Затем стали рассматривать реологические соотношения (3) с полной производной и данная модель получила название — модель Кельвина–Фойгта. А.П. Осколков рассмотрел случай некоторого упрощения полной производной — данная модель носит название модель Осколкова [47]. Но позднее О.А. Ладыженская обнаружила ошибки в некоторых своих результатах, которые использовал Осколков А.П. [40] и в последующем только в монографии [32] на основе аппроксимационно–топологического подхода профессор В.Г. Звягин и доцент М.В. Турбин привели полное доказательство существования слабых решений исследуемой математической модели с полной производной в реологическом соотношении. Модель Кельвина–Фойгта также исследовалась множеством известных математиков (А.П. Осколков, В.К. Калантаров, В.В. Пухначев, С.Н. Антонцев, J. Malek и др. [50], [51], [53], [59], [67], [68], [84], [105], [110], [132]).

Однако в последние годы под влиянием идей рациональной механики стали интересоваться такими реологическими соотношениями, которые не зависят от наблюдателя, т.е. не меняются при галилеевой замене переменных (см. [61]):

$$t^* = t - t_0, \tag{4}$$

$$x^* = x_0^*(t) + Q(t)(x - x_0), \tag{5}$$

где t_0 — некоторое значение времени, x_0 — некоторая точка в пространстве, x_0^* — некоторая функция времени со значениями в точках пространства, а Q — некоторая функция времени со значениями в множестве ортогональных тензоров. Это условие возникло из физического закона «принципа объективности», который утверждает, что формулы, выражающие физические свойства тела и содержащие время t, точку x и их различные функции не должны меняться при преобразованиях (4)–(5). Модели Фойгта и Кельвина–Фойгта не удовлетворяют принципу объективности. Для того чтобы реологическое соотношение (3) удовлетворяло принципу объективности было предложено рассмотреть объективную производную в данном соотношение.

Определение. *Пусть $T(t,x)$ — произвольная тензорнозначная функция, не зависящая от наблюдателя. Оператор вида*

$$\frac{DT(t,x)}{Dt} = \frac{dT(t,x)}{dt} + G(\nabla v(t,x), T(t,x)),$$

где G — некоторая матричнозначная функция двух матричных аргументов, называется объективной производной, если при любом изменении системы отсчета (4)–(5) выполнено равенство

$$\frac{D^*T^*(t,x)}{Dt^*} = Q(t)\frac{DT(t,x)}{Dt}Q(t)^T$$

для всех возможных функций T.

Общий вид объективной производной имеет сглаженная производная Яуманна:

$$\frac{DT(t,x)}{Dt} = \frac{dT(t,x)}{dt} + T(t,x)W_\rho(t,x) - W_\rho(t,x)T(t,x), \tag{6}$$

где $W = (W_{ij}(v))$, $W_{ij}(v) = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\Big)$, $i,j = \overline{1,n}$, обозначается тензор завихренности, а $W_\rho(v) = \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x-y)W(t,y)\,dy$ – сглаживание тензора завихренности, где $\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – гладкая функция с компактным носителем, такая что $\int_{\mathbb{R}^n} \rho(y)\,dy = 1$ и $\rho(x) = \rho(y)$ для x и y с одинаковыми евклидовыми нормами.

Модели, удовлетворяющие принципу объективности, особенно сложны для изучения и на настоящее время с точки зрения математических исследований мало изучены (имеется только небольшое количество математических работ, посвященных таким моделям, большая часть из которых посвящена исследованию либо стационарных моделей, либо при малых данных для эволюционных уравнений, что несколько упрощает задачу). В качестве примера работ, посвященных изучению таких моделей, можно привести статьи [111], [112], [129], [153]. При этом именно такие модели наиболее точно описывают поведение среды и именно их исследование является наиболее актуальным.

Надо заметить, что реологическое соотношение (3) со сглаженной объективной производной Яуманна является частным случаем реологического соотношения Ривлина–Эриксена для описания реологических свойств так называемых жидкостей второго порядка («second–order fluids») см. [140]. Модель Ривлина–Эриксена используется при расчете выдавливания вязкоупругого полимера из экструдера на горизонтальную плоскость [138]. Данные жидкости описываются очень сложными системами уравнений. До сих пор большого числа результатов для них не удалось получить, только установлены некоторые теоремы существования для локальных случаев или при малых данных (см. [77], [85], [86], [104], [107], [128], [145]).

Как было описано выше, реологические соотношения должны включать в себя совокупность теоретических и экспериментальных данных. Экспериментальные данные для данных реологических соотношений были также получены. Известно, что если в воду добавить небольшое количество полимера, то вязкость и плотность получившегося раствора практически не изменятся и останутся постоянными (в отличие от его реологических свойств). Зафиксированное снижение сопротивления трения за счет полимерных добавок [146] стимулировало цикл как экспериментальных работ по изучению движения водных растворов полимеров в трубах и в пограничном слое при ламинарном и турбулентном режимах течения [3], [10], [71], [106], [113], [136], [141], так и теоретических исследований [2], [15], [52]. Подробная библиография работ, посвященных течению полимерных растворах в трубах, содержится в [114] и в работе [54]. В таких средах равновесное состояние устанавливается не мгновенно после изменения внешних условий, а с некоторым запаздыванием, которое характеризуется значением времени релаксации. Это запаздывание объясняется процессами внутренней перестройки. Группа ученых из Санкт–Петербурга провела эксперименты и доказала, что именно данные реологические соотношения описывают течение слабо концентрированных водных растворов полимеров, например, растворов полиэтиленоксида и полиакриламида, растворов полиакриламида и гуаровой смолы ([2], [52]). Поэтому рассматриваемые в диссертации модели также часто называют моделями движения водных растворов полимеров.

Также отметим, что первая теоретическая модель движения водного раствора полимеров, учитывающая их релаксационные свойства, была сформулирована в работе Я.И. Войткунского, В.Б. Амфилохиева и В.А. Павловского [15]. Авторы исходили из варианта модели максвелловского типа для вязкоупругой жидкости. Затем в работе В.А. Павловского [52] эта модель была упрощена и использовалась для описания турбулентного пограничного слоя в предельном случае малых времен релаксации. Поэтому рассматриваемые в диссертации модели также часто называют моделями Павловского (см. [53], [78]).

Как было описано выше, реологические модели вязкоупругих сред делятся на две группы: дифференциальные и интегральные. Все описанные выше модели относятся к первой группе. Однако, возникает потребность изучения большого класса полимеров, в которых необходимо учитывать эффекты ползучести и релаксации. Оказывается, что подходящими для этого являются модели с дробными производными (см. [70]). Такие реологические модели с дробными производными относятся ко второй группе. Интегральная модель учитывает все предшествующие состояния вязкоупругой среды, как бы далеко ни отстояли они от текущего момента времени. Такие модели используются при значительном влиянии эффектов памяти и большом времени релаксации. Напротив, традиционно применяемые при описании течений полимеров дифференциальные модели предполагают относительно быструю релаксацию структуры вязкоупругой среды. В [131] дана механическая интерпретация этих моделей и приведен хороший библиографический обзор. В частности, в [131] рассмотрена механическая модель параллельного соединения элементов модели Ньютона ($\mu_0\dot{e}$) и элементов модели Скотта Блэрома ($\mu_1 D_{0t}^{\beta} e$, см. [142]), где e — тензор деформации. Для данной модели Скотт Блэром рассматривал дробную производную Капуто

$$D_{0t}^{\beta}\varphi = I_{0t}^{1-\beta}\frac{d}{dt}\varphi(\tau) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\int_0^t (t-\tau)^{-\beta}\frac{d}{dt}\varphi(\tau)d\tau$$

порядка $\beta \in (0,1)$ функции $\varphi(t), t \in [0,T]$ (см. [57], [123]). Здесь $\Gamma(\beta)$ — гамма–функция Эйлера, определяемая через абсолютно сходящийся интеграл $\Gamma(\beta) = \int_0^\infty t^{\beta-1}e^{-t}\,dt$ (см. [123]). Таким образом, получается следующее реологическое соотношение: $\sigma = \mu_0\dot{e} + \mu_1 D_{0t}^{\beta} e$. Переходя от тензора деформации e к тензору скоростей деформации $\mathcal{E}(v) = \dot{e}$, в работе [45] показано, что получается следующее реологическое соотношение называемое дробной моделью Фойгта (см. [152]):

$$\sigma = \mu_0\mathcal{E}(v) + \mu_1 I_{0t}^{1-\beta}\mathcal{E}(v) = \mu_0\mathcal{E}(v) + \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\beta)}\int_0^t (t-s)^{-\beta}\mathcal{E}(v)(s,x)\,ds \quad (7)$$

с константами $\mu_0 > 0$ и $\mu_1 \geq 0$. Здесь $I_{0t}^{1-\beta}$ — дробный интеграл.

Наличие интегрального слагаемого в (7) отражает учет памяти сплошной среды. Различные модели с памятью возникали и изучались в большом числе работ (см., например, [6], [55]). Но, как правило, математические постановки рассматривали вклад памяти при постоянном значении пространственной переменной x (см. [28], [66]). На практике такие модели абсолютно «не физичны». Память среды необходимо учитывать вдоль траектории движения частицы (данное замечание было предложено в работе [134]). Таким образом, реологическое соотношение (7) необходимо уточнить:

$$\sigma = \mu_0 \mathcal{E}(v) + \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t (t-s)^{-\beta} \mathcal{E}(v)\big(s, z(s;t,x)\big)\, ds. \tag{8}$$

Здесь $z(s;t,x)$ — траектория частицы среды, указывающая в момент времени s расположение частицы среды, находящейся в момент времени t в точке x. Данная траектория определяется полем скоростей v:

$$z(s;t,x) = x + \int_t^s v\big(\tau, z(\tau;t,x)\big)\, d\tau, \quad t, s \in [0,T], \quad x \in \Omega. \tag{9}$$

Заметим, что для корректной постановки задачи необходимо, чтобы траектории z однозначно определялись полем скоростей v, другими словами, чтобы уравнение (9) имело единственное решение для поля скоростей v. Однако существование решений уравнения (9) при фиксированном v известно лишь в случае $v \in L_1(0,T;C(\overline{\Omega}))$ и это решение единственно для $v \in L_1(0,T;C^1(\overline{\Omega}))$ таких, что $v|_{(0,T)\times\partial\Omega} = 0$ (см., например, [135]). Поэтому даже для сильных решений, частные производные которых, входящие в уравнение (9), содержатся в $L_2(0,T;L_2(\Omega))$, траектории движения не определяются однозначно. Один из возможных выходов из этой ситуации — это регуляризация поля скоростей в каждый момент времени t с помощью усреднения по переменной x и определение траекторий $z(\tau;t,x)$ для регуляризованного поля скоростей (см. [28]). Однако, в диссертации используется другой подход. Сравнительно недавно (см., например, [90], [95]), была исследована разрешимость интегральной задачи Коши (9) в случае, когда скорость v принадлежит пространству Соболева, и установлены существование, единственность и устойчивость регулярных лагранжевых потоков (РЛП) — обобщения понятия классического решения. Следуя данным работам, в диссертации рассматривается реологическое соотношение (8) с траекторией z, являющейся РЛП, порожденным скоростью v.

Таким образом, в диссертации рассматривается ряд моделей неньютоновской гидродинамики, описывающей движение вязкоупругих сред. А именно, модель нелинейно–вязкой среды, модели с реологическим соотношением (3), в которых участвуют частные, полные, объективные и дробные производные.

Стоит отметить, что исследование математических проблем для данных моделей представляет большой интерес в механике, медицине, полимерной промышленности и других направлениях.

Отметим также, что для данная диссертация является продолжением научных исследований, начатых в работах автора диссертации при проведение его кандидатских исследований (см. [19], [20]). В частности, в кандидатской диссертации Звягина А.В. доказывалась слабая разрешимость и существование оптимального управления с обратной связью для стационарных математических моделей с реологическим соотношением (3), в которых участвовали полные и объективные производные. В кандидатской диссертации Звягина А.В. также установлена слабая разрешимость эволюционной математической модели с реологическим соотношением (3), удовлетворяющим принципу объективности, доказано существование оптимального управления с обратной связью, и существование траекторных и глобальных аттракторов в автономном случае. Данная диссертация содержит результаты, продолжающие изучение рассматриваемых в кандидатской диссертации математических моделей.

Приведем **краткий обзор содержания** диссертации по главам, в котором подробно опишем **методы и подходы, используемые при исследованиях**:

Первая глава посвящена исследованию альфа–моделей движения вязкоупругих сред. Альфа–модели представляют собой своего рода регуляризованные приближенные системы, которые зависят от некоторого положительного параметра α, причем регуляризация осуществляется путем некоторой фильтрации вектора скорости, который стоит в аргументе нелинейного члена. Параметр α отражает ширину шкалы пространственной фильтрации для модифицированной скорости. В качестве ядра фильтрации наиболее часто используют оператор Гельмгольца $I - \alpha^2\Delta$. Выбор такого оператора связан с его хорошими математическими свойствами.

Идея использования такого рода аппроксимаций впервые возникла в работе Ж. Лере [127] (в данной работе Ж. Лере использовал общий вид ядра фильтрации) для доказательства существования слабого решения системы уравнений Навье–Стокса. Позднее на этой идее были построены различные альфа–модели для уравнений Эйлера [117], [118], Навье–Стокса [81] и др. Помимо указанных моделей также рассматривались другие модификации альфа-модели Навье-Стокса [103]: альфа-модель Лере [83] и [120], альфа-модель Кларка [79], альфа-модель Бардина [80]. Подробный обзор результатов по альфа–моделям приведен в монографии [126] и обзорной статье [30].

Вообще каждая альфа–модель характеризуется своим векторным дифференциальным оператором 1–го порядка $F(u,v) = (F^1(u,v),\dots,F^n(u,v))$, в котором компоненты $F^i(u,v)$ являются линейными комбинациями всевозможных операторов вида $u^k\partial_{x_j}v^m$, $v^k\partial_{x_j}u^m$, $u^k\partial_{x_j}u^m$:

$$F^i(u,v) = \sum_{k,j,m=1}^{n} C^i_{kjm}u^k\partial_{x_j}v^m + D^i_{kjm}v^k\partial_{x_j}u^m + E^i_{kjm}u^k\partial_{x_j}u^m, \qquad (12)$$

где $C^i_{kjm}, D^i_{kjm}, E^i_{kjm}$ — некоторые вещественные коэффициенты. Отметим, что в представлении (12) мономы вида $v^k\partial_{x_j}v^m$ не используются, так как они не содержат компонентов «сглаженного» векторного поля u.

Альфа–модели разделены на два класса, в зависимости от свойств ортогональности функции $F(u,v)$ к u или v в пространстве H:

$$\langle F(u,v), v\rangle = 0 \qquad \forall u,v\in\mathcal{V} \quad (\text{класс I}),$$

$$\langle F(u,v), u\rangle = 0 \qquad \forall u,v\in\mathcal{V} \quad (\text{класс II}).$$

Основными характерными примерами каждого класса являются альфа–модель Лере с нелинейным оператором $F(u,v) = (u\cdot\nabla)v$ (см. [83], [163]) и альфа–модель Навье–Стокса с нелинейным оператором $F(u,v) = -u\times(\nabla\times v)$ (см. [103], [169]).

С одной стороны, интерес к изучению альфа–моделей связан с изучением исходных моделей, с другой стороны в последнее время альфа–модели стали изучаться как независимые системы и применяться к исследованию эффектов турбулентности для потоков жидкости (см. [116]) и в численных исследованиях. Альфа–модели представляют больший интерес для прикладных ученых, производства и промышленности, чем исходные модели, в виду более простого численного исследования. Также делались шаги по использованию альфа–моделей в изучении движения потоков воды в Атлантическом океане, циркуляции атмосферы для глобального моделирования климата (см. [115]).

Вообще, большая часть работ по исследованию разрешимости альфа–моделей посвящена моделям движения идеальной или ньютоновской жидкости (см. [83], [103], [126], [163]). Только за последние несколько лет появились работы, посвященные альфа–моделям для неньютоновской жидкости (см. [23], [31], [148]). В первой главе диссертации продолжено изучение альфа–моделей только уже для сред неньютоновой гидродинамики, а именно для дробной модели Фойгта и модели движения растворов полимеров.

Первый параграф первой главы диссертации посвящен альфа–модели I класса для начально–краевой задачи дробной модели Фойгта. В данной модели память рассматривается вдоль траектории движения частиц жидкости (9), определяемой полем скоростей. В связи с недостаточной гладкостью поля скоростей и, как следствие, невозможностью однозначного определения траектории через поле скоростей для любого начального значения слабое решение изучаемой задачи вводится с использованием регулярных лагранжевых потоков. На основе аппроксимационно–топологического подхода к исследованию задач гидродинамики доказывается существование слабых решений изучаемой альфа–модели, а также устанавливается сходимость решений альфа–модели к решениям исходной модели при стремлении параметра альфа к нулю.

Второй параграф первой главы диссертации посвящен альфа–модели I класса для начально–краевой задачи, описывающей движение водных растворов полимеров. В данной модели вязкоупругая среда рассматривается с реологическим соотношением (3), удовлетворяющим принципу объективности. То есть, в соотношение (3) рассматривается сглаженная объективная производная Яуманна (6). На основе аппроксимационно–топологического подхода к исследованию задач гидродинамики доказывается существование слабых решений изучаемой альфа–модели, а также устанавливается сходимость решений альфа–модели к решениям исходной модели при стремлении параметра альфа к нулю.

Стоит отметить, что во всей диссертации используется аппроксимационно–топологического подхода к исследованию задач гидродинамики. Это подход был предложен В.Г. Звягиным (см. [24], [27], [32], [154], [155]) и получил дальнейшее развитие в его работах и работах его учеников (см. [33], [34]). Основная идея данного подхода для исследуемой задачи заключается в следующем: 1) вводится семейство вспомогательных задач, аппроксимирующих исходную, на основе добавления оператора Лапласа в третьей степени; 2) изучается разрешимость веденных вспомогательных задач, в более лучших функциональных пространствах, чем исходные. Для этого дается операторная трактовка семейства вспомогательных задач, изучаются свойства операторов, устанавливаются априорные оценки решений семейства вспомогательных задач (зависящие от параметра аппроксимации и в функциональных пространствах, в которых изучается разрешимость вспомогательного семейства) и к полученному операторному равенству применяется теория топологической степени. 3) Далее, для решения вспомогательной задачи устанавливаются оценки в исходных функциональных пространствах и не зависящие от параметра аппроксимации. На основе полученных оценок совершается предельный переход, который доказывает существование слабого решения изучаемой начально–краевой задачи.

Стоит отметить, что другие подходы к исследованию разрешимости начально–краевых задач гидродинамики (метод Галёркина, метод теории полугрупп, итерационные методы), как правило, основываются на хороших свойствах операторов (положительная определенность, самосопряженность), определяемых линейной частью уравнения, что бывает не всегда и зависит от начальных условий. В частности, А.П. Осколков при исследование частного случая изучаемой начально–краевой задачи в работе [47] признал невозможность использования модифицированного метода Галёркина в исследование данной задачи, т.к. в ходе детального анализа не удалось построить полную в необходимых функциональных пространствах систему функций, чтобы решения краевой задачи с данными правыми частями также образовывали полную систему в необходимых функциональных пространствах. Тем самым, применение аппросимационно–топологического подхода в данной задаче является решающим моментом для получения разрешимости.

Отметим также, что схема аппроксимационно–топологического подхода основывается на использование теории топологической степени. Во втором параграфе первой главы используется теория топологической степени Лере–Шаудера для вполне непрерывных векторных полей [41]. Данный подход является уже классическим вариантом. Однако, к примеру, при исследовании задачи, описанной в первом параграфе первой главы, ни саму задачу, ни ее аппроксимацию в операторном виде Лере–Шаудера представить невозможно. Выход был найден — удалось доказать, что оператор, отвечающий за память среды, является уплотняющим оператором. Для уплотняющих операторов построена теория топологической степени (см. [36], [56]), которая была использована для доказательства разрешимости. Таким образом, хоть метод исследования начально–краевых задач в диссертации является единым, в каждом отдельном случае он имеет свои модификации, что является важным показателем сложности изучаемых в диссертации задач.

Вторая глава продолжает исследование разрешимости моделей вязкоупругих сред с реологическим соотношением (3). В данной главе задачи рассматриваются с вязкость ν, зависящей от температуры θ. Добавление температуры θ в коэффициент вязкости приводит к появлению дополнительного уравнения — уравнения баланса энергии (см. [4]). Основные трудности, возникающие в изучении таких задач, связаны с исследованием разрешимости начально–краевых линейных параболических задач, соответствующих уравнению баланса энергии, с негладкими коэффициентами и правой частью из $L_1(Q_T)$, где $Q_T = [0, T] \times \Omega$. Отметим обширную литературу, посвященную параболическим задачам с правыми частями из $L_1(Q_T)$ (см., например, [64], [73], [74], [75], [76], [87], [91], [92], [95], [96] и имеющуюся там библиографию). В этих работах трудности, связанные с $L_1(Q_T)$, преодолеваются различными способами. В [74], [75] исследования основываются на использовании понятия ренормализованных (энтропийных) решений. В [93], [94] используется подход, основанный на применении теории аналитических полугрупп в $L_1(Q_T)$ и теории интерполяционных пространств. Однако результатами этих работ нельзя воспользоваться для изучаемых в диссертации задач из-за того факта, что коэффициенты в уравнения баланса энергии являются негладкими (в указанных выше работах они гладкие). Поэтому в диссертации используются результаты работы [151], в которой использовался подход к доказательству разрешимости уравнения баланса энергии, основанный на применении теории дробных степеней позитивных операторов, некоторых свойств интегральных операторов типа потенциала и использовании теории аналитических полугрупп в $L_p(\Omega)$, $p > 1$. Отметим также, что при этом для разрешимости параболической задачи получаются разные оценки на показатель суммируемости в зависимости от размерности пространства.

Общий подход к изучению задач данного типа в диссертации строится на следующей конструкции. Доказательство разрешимости изучаемых задач разбирается на этапы. На первом этапе устанавливается разрешимость изучаемой начально–краевой задачи с фиксированной температурой. Далее устанавливается разрешимость изучаемой начально–краевой задачи с фиксированной скоростью. То есть фактически задача разбивается на две независимые системы. А далее описывается итерационный процесс, состоящий в последовательном решении вышеприведенных задач, и, наконец, доказывается сходимость последовательных приближений к решению исходной начально–краевой задачи. Одна из основных трудностей остается на последнем этапе, в установление предельного перехода.

Данный подход был применим к начально–краевым задачам, возникающим из реологического соотношения (3). А именно, для модели с частной производной (модель Фойгта) и с вязкость ν, зависящей от температуры θ, удалось доказать глобальную по времени слабую разрешимость в двумерном и трехмерном случаях (результаты приведены в *первом параграфе второй главы*). Заметим, что полученные результаты удалось доказать и для более сложных моделей — модели Кельвина–Фойгта, и для модели с реологическим соотношением, удовлетворяющим принципу объективности, и с вязкость ν, зависящей от температуры θ (результаты приведены в *третьем и четвертом параграфах второй главы*).

Далее, было замечено, что первая термо–модель (модель Фойгта), для которой удалось получить разрешимость с вязкостью, зависящей от температуры, является своего рода аппроксимацией системы Навье–Стокса, для которой данный вопрос остался до сих пор открытым (система уравнений Буссинеска). В тоже время в диссертации уже приводился аргумент, что один из способов изучения математических моделей, заключается в рассмотрении альфа–моделей изучаемых задач. На основе этой идеи в диссертации изучалась альфа–модель I класса — модель Лере с вязкостью, зависящей от температуры. Для данной модели удалось доказать глобальную по времени слабую разрешимость в двумерном и трехмерном случаях (результаты приведены в *пятом параграфе второй главы*).

Так как для всех задач второй главы разрешимость была получена на основе теории топологической степени, а исследования топологической степени для различных отображений продолжаются достаточно давно и продуктивно, было замечено, что для изучаемых моделей можно рассмотреть задачу оптимального управления с обратной связью. Заметим, что задачам оптимального управления в механике жидкости посвящено большое число работ (см., [63]). Однако, большинство из них посвящены различным задачам оптимального управления для системы Навье–Стокса. И лишь в малом числе работ рассматриваются задачи для неньютоновских жидкостей, в том числе и задачи с обратной связью для подобных моделей движения жидкости (см., например, [133]). Отметим, что в последнее десятилетие при исследовании различных аспектов теории управляемых систем классическое понятие обратной связи в литературе используется и в расширенном смысле: отображение обратной связи понимается многозначным, ставящим в соответствие состоянию системы целое множество допустимых значений. При этом это множество может определяться как в каждый момент времени функционирования системы, так и на всем временном промежутке. Этот подход позволяет эффективно использовать для описания управляемых систем теорию дифференциальных включений, основываясь на известной лемме А.Ф. Филиппова о неявной функции и теории степени многозначных отображений. Такой подход используется, например, в [13], [69], [119]. Объясним этот момент подробнее. Напомним, что обычно рассматривают управляемые системы с обратной связью вида:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), u(t)), \\ u(t) \in U(t, x(t)), \end{cases} \tag{10}$$

где $f : I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $I = [t_0, T]$; $\mathbb{R}^m$ — пространство управляющих параметров, функция $u(x)$ — управляющий параметр, который в каждый момент времени t выбирается из соответствующего множества допустимых управлений U, зависящего, вообще говоря, как от времени, так и от состояния системы. Мультиотображение $U : I \times \mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^m)$ называется мультифункцией обратной связи ($K(Y)$ — совокупность, состоящая из всех компактных подмножеств Y).

Решением управляемой системы (10) называется пара x, u, состоящая из траектории x и управления u. Здесь $x : I \to \mathbb{R}^n$ — функция, удовлетворяющая уравнению $x'(t) = f(t, x(t), u(t))$ почти всюду на I, а $u : I \to \mathbb{R}^m$ — измеримая функция, удовлетворяющая включению $u(t) \in U(t, x(t))$ всюду на I.

Оказывается от управляемой системы (10) можно перейти к ассоциированному с ней дифференциальному включению:

$$x'(t) \in F(t, x(t)). \tag{11}$$

Каждая траектория управляемой системы с обратной связью (10) является решением включения (11). Лемма Филиппова [62] позволяет установить и обратную связь. Для любого решения x включения (11) найдется измеримая функция $u : I \to \mathbb{R}^m$ такая, что пара $\{x, u\}$ будет решением управляемой системы с обратной связью (10).

Установленная эквивалентность управляемых систем и дифференциальных включений позволяет без труда переносить на управляемые системы полученные ранее утверждения, касающиеся дифференциальных включений. Более того, изученные свойства множеств решений дифференциальных включений могут быть использованы для решений задач оптимизации (см. обзорную статью [162]). Используя данный факт, *во втором параграфе второй главы* устанавливается существование оптимального управления с обратной связью для модели Фойгта с вязкостью, зависящей от температура, а *в шестом параграфе второй главы* устанавливается существование оптимального управления с обратной связью для альфа–модели Лере с вязкостью, зависящей от температура. В рассматриваемых задачах внешние силы, которые и являются управлением, зависят от скорости движения жидкости и температуры среды, и принадлежат образу некоторых многозначных отображений, что позволяет более точно выбирать управление, поскольку в данном случае управление выбирается не из изначально заданного конечного набора имеющихся управлений. Для решения данных задач также используется аппроксимационно–топологический подход. Однако в данном случае применяется теория топологической степени многозначных векторных полей [12] (отметим, что теория топологической степени многозначных векторных полей активно развивалась в Воронежской математической школе). После доказательства разрешимости задач управления удается доказать, что в множестве решений найдётся хотя бы одно решение, дающее минимум заданному функционалу качества.

Третья глава посвящена доказательству существования аттракторов для вязкоупругих сред.

Классическая теория аттракторов динамических систем изначально применялась к исследованию обыкновенных дифференциальных уравнений. Потребовалось время, чтобы адаптировать эту теорию к уравнениям с частными производными. И это было сделано в работах О. А. Ладыженской, А. В. Бабина и М. И. Вишика, Р. Темама и др. математиков (см. [8], [9], [37], [39]). С помощью данной теории О. А. Ладыженской было доказано существование глобального аттрактора двумерной системы Навье–Стокса [37] (см. также обзорную работу [39]). Этот подход оказался продуктивен и в некоторых других задачах (см, например, [101], [102] и другие). Однако даже в задачах классической гидродинамики данный подход оказался неприменим. Дело в том, что корректное определение оператора сдвига требует существование и единственность решения, выходящего из каждой точки фазового пространства и определенного на всей неотрицальной полуоси. К примеру, для трехмерной системы Навье–Стокса не установлено ни существования глобального сильного решения, ни единственность слабого, так что построить динамическую систему в данном случае не удается. Для решения данных трудностей российскими учеными М. И. Вишиком и В. В. Чепыжовым [82] и независимо американским ученым G. Sell [143] была предложена теория траекторных аттракторов. Однако в данной теории на множество решений возникает требование трансляционной инвариантности и некие условия типа замкнутости. К сожалению, в задачах неньютоновской гидродинамики условие трансляционной инвариантности пространства траекторий оказывается ограничительным. В данной теории траекторные пространства строятся на основе энергетических оценок. На практике редко когда удается получить трансляционно инвариантную оценку. Поэтому данная теория была развита в работах профессора

В.Г. Звягина и его учеников [25], [150], [155], в которых удалось отказаться от этих ограничительных условий. Заметим, что это развитие было построено на основе следствия из топологической леммы Шуры–Буры. До этого такие топологические результаты не использовались в теории траекторных аттракторов.

Таким образом, в данной диссертации используется относительно новая теория траекторных аттракторов. Данная теория применяется к задачам, рассмотренным в данной диссертации, а именно для моделей движения вязкоупругих неньютоновских сред. Однако, в то время как теория автономных аттракторов более или менее широко применима, теория аттракторов для неавтономных систем не столь хорошо изучена. Для автономной системы, т.е. для системы, закон эволюции которой не меняется со временем, все моменты абсолютного времени равнозначны. Поэтому для автономной системы при изучение аттракторов необходимо, чтобы промежуток времени между начальным моментом и моментом наблюдения был велик. Для неавтономных систем значения начального момента и момента наблюдения на временной шкале становятся важными. Однако понятие аттрактора на неавтономный случай может переноситься по-разному. Для моделей с неавтономной правой частью существует два типа аттракторов: равномерные аттракторы и pullback–аттракторы (понятие pullback–аттрактора появилось в западной литературе и до сих пор не устоялось в российской литературе, поэтому в диссертации сохранено зарубежное название). Главное различие данных типов аттракторов состоит в понимании их поведения. Равномерные аттракторы изучают поведение системы в отдалённом будущем. Pullback–аттракторы изучают поведение системы в настоящем при условии, что начало процесса имело место очень давно. Равномерные и pullback–аттракторы описывают различных, не зависящих друг от друга, свойства динамики. Эти аттракторы не сводятся друг к другому. Из существования аттракторов одного типа не следует существование аттракторов другого типа. Теории равномерных и pullback аттракторов для моделей неньютоновской гидродинамики практически не исследовались в силу своей сложности. Однако, подход предложенный профессором В.Г. Звягиным, оказался применим и в данном случае ([25], [26], [147]). Поэтому на основе данной теории, чтобы охватить в диссертации все случаи, в *первом параграфе третьей главы* изучается существование pullback–аттракторов для математической модели с реологическим соотношением (3), удовлетворяющим принципу объективности, в котором удалось доказать существование минимального траекторного pullback–аттрактора и минимального pullback–аттрактора, а во *втором параграфе третьей главы* исследуется существование равномерного траекторного аттрактора и равномерного глобального аттрактора для модели движения нелинейно–вязкой жидкости в неавтономном случае.

Положения, выносимые на защиту. Все результаты диссертационной работы являются новыми и получены лично автором. Из них выделим следующие:

1) Теоремы существования в ограниченной области пространства R^n, $n = 2, 3$, слабых решений начально–краевой задачи для дробной альфа–модели Фойгта и сходимости решений альфа–модели к решению исходной модели при стремлении параметра альфа к нулю.

2) Теоремы существования в ограниченной области пространства R^n, $n = 2, 3$, слабых решений начально–краевой задачи для альфа–модели, описывающей движение водных растворов полимеров, и сходимости решений альфа–модели к решению исходной модели при стремлении параметра альфа к нулю.

3) Теорема существования в ограниченной области пространства R^n, $n = 2, 3$, слабых решений начально–краевой задачи для математической модели Фойгта с вязкостью зависящей от температуры.

4) Теорема существования оптимального управления с обратной связью для математической модели Фойгта с вязкостью зависящей от температуры.

5) Теорема существования в ограниченной области пространства R^n, $n = 2, 3$, слабых решений начально–краевой задачи для математической модели Кельвина–Фойгта с вязкостью зависящей от температуры.

6) Теорема существования в ограниченной области пространства R^n, $n = 2, 3$, слабых решений начально–краевой задачи для математической модели с реологическим соотношением, удовлетворяющим принципу объективности, и с вязкостью зависящей от температуры.

7) Теорема существования в ограниченной области пространства R^n,

$n = 2, 3$, слабых решений начально–краевой задачи для альфа–модели Лере с вязкостью зависящей от температуры.

8) Теорема существования оптимального управления с обратной связью для альфа–модели Лере с вязкостью зависящей от температуры.

9) Теоремы существования pullback–аттракторов для математической модели, описывающей движение водных растворов полимеров.

10) Теоремы существования равномерных аттракторов для математической модели нелинейно–вязких сред.

Практическая и теоретическая значимость. Работа носит теоретический характер. Однако как было отмечено при описание изучаемых математических моделей, исследование математических проблем для данных моделей представляет большой интерес в механике, медицине, полимерной промышленности и других направлениях.

Апробация результатов. Результаты диссертации докладывались и обсуждались

на международных конференциях: «10th Euromech Fluid Mechanics Conference» (Копенгаген, Дания 2014); «Дифференциальные и разностные уравнения и приложения» (Амадора, Португалия 2015); «Теория регулярности для эллиптических и параболических систем и задач динамики жидкости» (Телч, Чехия 2016); 11ая Европейская конференция по механике жидкости (Севилья, Испания 2016); «Перспективы конечномерных и бесконечномерных динамических систем» (Барселона, Испания 2017); Equadiff 2017 (Братислава, Словакия 2017); «Математика в современном мире» (посвященная 60–летию института математики им. С.Л. Соболева) (Новосибирск, Россия, 2017); «20th European Conference on Mathematics for Industry» (Будапешт, Венгрия 2018); «16th school on interactions between dynamical systems and partial differential equations» (Барселона, Испания 2018); «12th AIMS conference on dynamical systems, differential equations and applications» (Тайбэй, Тайвань 2018); «PDEs and Mathematical Hydrodynamics: in honor of Vsevolod Alekseevich Solonnikov's 85'th Birthday» (Санкт–Петербург, Россия 2018); Equadiff (Лейден, Нидерланды 2019); «Mathematical modelling in applied sciences» (Белгород, Россия 2019); Dynamics Days Europe (Росток, Германия 2019);

на международных конгрессах: «6th European Congress of Mathematics» (Краков, Польша 2012), «International Congress of Mathematicians» (Сеул, Корея 2014); Международный конгресс по прикладной и промышленной математике (Пекин, Китай 2015); 7ой Европейский математический конгресс (Берлин, Германия 2016);

на семинарах: НИИ математики (ВГУ, 2012–2021); на семинаре под руководством академика А.Т. Фоменко (МГУ 2015); на семинаре «Современные достижения в механики жидкости» (Загреб, Хорватия 2017); на семинаре профессора Jose Francisco Rodrigues (Лиссабон, Португалия 2018); на общегородском семинаре по математической физики им. В.И. Смирнова (Санкт–Петербург, Россия 2018); на семинаре института систем тепловой промышленности (IUSTI laboratory), Aix Marseille University (Марсель, Франция 2019); на семинаре «Оптимизация и нелинейный анализ» лаборатории института проблем управления РАН (Москва, Россия 2020); на семинаре по дифференциальным и функционально–дифференциальным уравнениям под руководством профессора А.Л. Скубачевского (РУДН 2021); на семинаре «Задачи дифференциальных уравнений, анализа и управления: теория и приложения» под руководством чл.-корр. М.И. Зеликина, чл.-корр. В.Ю. Протасова, профессора В.М. Тихомирова, профессора А.В. Фурсикова (МГУ 2021); на семинаре по нелинейным задачам уравнений в частных производных и математической физики под руководством профессора А.Е. Шишкова (РУДН 2021); на семинаре «Краевые задачи механики сплошных сред» под руководством чл.-корр. П.И. Плотникова и профессора В.Н. Старовойтова (Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева 2021); на семинаре «Вычислительные проблемы задач математической физики» под руководством профессора Д.Л. Ткачева (Институт математики им. С.Л. Соболева 2021); на семинаре «Прикладная гидродинамика» под руководством чл.-корр. В.В. Пухначева и профессора Е.В. Ерманюка (Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева 2021); на научных семинарах под руководством профессора Г.В. Демиденко (Институт математики им. С.Л. Соболева 2021, 2022).

Исследования, включенные в настоящую диссертацию, поддержаны грантами РФФИ № 14–01–31228–мол_а (руководитель, 2014–2015), № 16–31–60075 мол_а_дк (руководитель, 2016–2018), № 19–31–60014

Перспектива (руководитель, 2019–2022), гранта Президента РФ № МК-2213.2018.1 (руководитель, 2018–2019), Мегагранта «Исследование задач математической гидродинамики» проект 14.Z50.31.0037 (исполнитель, 2017–2019), грантами РНФ № 16–11–10125 (исполнитель, 2014–2016), № 19–11–00146 (исполнитель, 2019–2021), № 21–71–00038 (руководитель, 2021–2023).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [157]–[173]. Все работы опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ. Работы [157], [158], [167], [170], [173] опубликованы в журналах из квартеля Q1 по международным базам Web of Science или Scopus. Из совместных работ [158], [159], [161], [163] в диссертацию вошли только результаты, полученные диссертантом лично.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, разделенных на параграфы, заключения и библиографии, содержащей 173 наименований. Общий объем диссертации — 231 страниц.

Автор глубоко благодарен члену–корреспонденту РАН Плотникову Павлу Игоревичу, члену–корреспонденту РАН Пухначеву Владиславу Васильевичу, профессору Звягину Виктору Григорьевичу, профессору Орлову Владимиру Петровичу и доценту Турбину Михаилу Вячеславовичу за внимание и обсуждение результатов работы.

ГЛАВА 1
АЛЬФА–МОДЕЛИ ВЯЗКОУПРУГИХ СРЕД

Данная глава посвящена исследованию слабой разрешимости начально–краевых задач для двух альфа–моделей вязкоупругих сред. Первый параграф посвящен изучению дробной альфа–модели Фойгта, а второй параграф — альфа–модели, описывающей движение растворов полимеров.

1.1 Дробная альфа–модель Фойгта

В данном параграфе рассматривается математическая модель с дробной производной в реологическом соотношении (8). В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, на отрезке времени $[0, T]$, $T > 0$, рассматривается следующая начально–краевая задача:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \mu_0 \Delta v -$$

$$- \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\beta)} \mathrm{Div} \int_0^t (t-s)^{-\beta} \mathcal{E}(v)\big(s, z(s;t,x)\big)\, ds + \nabla p = f, \qquad (1.1.1)$$

$$u = (I - \alpha^2 \Delta)^{-1} v, \quad t \in [0,T], \quad x \in \Omega, \qquad (1.1.2)$$

$$z(\tau; t, x) = x + \int_t^\tau v\big(s, z(s;t,x)\big)\, ds, \quad t, \tau \in [0,T], \quad x \in \Omega, \qquad (1.1.3)$$

$$\mathrm{div}\, v(t,x) = 0, \quad t \in [0,T], \quad x \in \Omega, \qquad (1.1.4)$$

$$v|_{t=0} = v_0, \qquad v|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0. \qquad (1.1.5)$$

Здесь $z(\tau; t, x)$ — траектория частицы среды, указывающая в момент времени τ расположение частицы среды, находящейся в момент времени t в точке x, $\alpha > 0$ — скалярный параметр, $\mu_0 > 0$, $\mu_1 \geqslant 0, 0 < \beta < 1$ — некоторые константы. $\Gamma(\beta)$ — гамма-функция Эйлера, определяемая через абсолютно сходящийся интеграл $\Gamma(\beta) = \int_0^\infty t^{\beta-1} e^{-t}\, dt$ (см. [123]).

Для данной начально–краевой задачи (1.1.1)–(1.1.5) на основе аппроксимационно–топологического подхода к исследованию задач гидродинамики доказывается существование слабых решений изучаемой альфа–модели, а также устанавливается сходимость решений альфа–модели к решениям исходной модели при стремлении параметра альфа к нулю.

1.1.1 Постановка задачи

Для того чтобы ввести понятие слабого решения нам потребуется определить шкалу пространств V^α. Положим $V^0 = H$, $V^1 = V$ и $V^2 = W_2^2(\Omega)^n \cap V^1$. Мы будем использовать разложение Вейля векторных полей из $L_2(\Omega)$ (см., например, [38], [60]):

$$L_2(\Omega) = V^0 \oplus \nabla W_2^1(\Omega),$$

где $\nabla W_2^1(\Omega) = \{\nabla p : p \in W_2^1(\Omega)\}$, $\oplus$ – знак ортогональной суммы (пространства V^0 и $\nabla W_2^1(\Omega)$ ортогональны в $L_2(\Omega)$).

Пусть $\pi : L_2(\Omega) \to V^0$ – проектор Лере. Рассмотрим в пространстве $\mathcal{V}$ оператор $A = -\pi\Delta$. Оператор A продолжается в пространстве V^0 до замкнутого оператора, который является самосопряженным положительным оператором с вполне непрерывным обратным (подробнее см., например, в [16]). Область определения A совпадает с V^2. В силу теоремы Гильберта о спектральном разложении вполне непрерывных операторов, собственные функции $\{e_j\}$ оператора A образуют ортонормированный базис в V^0. Отметим, что если граница области Ω принадлежит классу C^∞, то $\{e_j\}$ – собственные функции оператора A будут бесконечно дифференцируемыми.

Пусть $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_k \leqslant \ldots$ – собственные значения оператора A. Обозначим через $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел и пусть $m \in \mathbb{N}$.

$$E_\infty = \big\{v = \sum_{j=1}^{m} v_j e_j : v_j \in \mathbb{R}\big\}$$

множество конечных линейных комбинаций, составленных из e_j. Определим пространство $V^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$, как пополнение E_∞ по норме

$$\|v\|_{V^\alpha} = \big(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^\alpha |v_k|^2\big)^{1/2}. \tag{1.1.4}$$

Лемма 1.1.1. *Пусть $\alpha \in \mathbb{N}$, то есть α — натуральное число. На пространстве V^α норма* (1.1.4) *эквивалентна норме $\|\cdot\|_{W_2^\alpha(\Omega)}$ пространства $W_2^\alpha(\Omega)$.*

Доказательство этой леммы см. в монографии [63].

В дальнейшем нам необходимы будут пространство V^1 с эквивалентной нормой (см. [32]):

$$\|v\|_{V^1} = \Big(\int\limits_{\Omega} \nabla v : \nabla v \, dx \Big)^{1/2}$$

и пространство V^3 с эквивалентной нормой:

$$\|v\|_{V^3} = \Big(\int\limits_{\Omega} \nabla \Delta v : \nabla \Delta v \, dx \Big)^{1/2}.$$

Также нам потребуется ввести дополнительные функциональные пространства. Множество $C^1 D(\overline{\Omega})$ состоит из взаимно однозначных отображений $z : \overline{\Omega} \to \overline{\Omega}$, совпадающих с тождественным отображением на $\partial\Omega$, и имеющих непрерывные частные производные первого порядка на Ω такие, что $\det(\partial z/\partial x) = 1$ в каждой точке области Ω. Будем предполагать, что в этом множестве используется норма пространства непрерывных функций $C(\overline{\Omega})$. Далее мы будем рассматривать множество $CG = C([0,T] \times [0,T], C^1 D(\overline{\Omega}))$. Заметим, что $CG \subset C([0,T] \times [0,T], C^1(\overline{\Omega}))$, поэтому далее CG рассматривается как метрическое пространство с метрикой, определяемой нормой пространства $C([0,T] \times [0,T], C(\overline{\Omega}))$.

Введем пространство, в котором будет доказана разрешимость изучаемой задачи:

$$W_1 = \{ v \in L_2(0,T; V^1) \cap L_\infty(0,T; V^0), \quad v' \in L_{4/3}(0,T; V^{-1}) \}$$

с нормой $\|v\|_{W_1} = \|v\|_{L_2(0,T;V^1)} + \|v\|_{L_\infty(0,T;V^0)} + \|v'\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})}$.

Обозначим через $\Delta_\alpha : V^\beta \to V^{\beta-2}$, $\beta \geq 0$, оператор $\Delta_\alpha = (J + \alpha^2 A)$, где $J = PI$, I — тождественный оператор. В силу [32, лемма 4.4.4] оператор Δ_α обратим. Применив проектор Лере $P : L_2(\Omega) \to V^0$ к обеим частям равенства $v = (I - \alpha^2 \Delta) u$ для $\beta = 3$ и выразим из последнего равенства u: $u = (J + \alpha^2 A)^{-1} v = \Delta_\alpha^{-1} v$. Т.к. $v(t) \in V^1$ получим, что $u(t) \in V^3$ при п.в. $t \in [0,T]$.

Как было отмечено в ведение, для корректной постановки начально–краевых задач необходимо, чтобы траектории z однозначно определялись полем скоростей v, другими словами, чтобы уравнение (1.1.3) имело единственное решение для поля скоростей v. Однако существование решений уравнения (1.1.3) при фиксированном v известно лишь в случае $v \in L_1(0,T; C(\overline{\Omega})^n)$

и это решение единственно для $v \in L_1(0,T;C^1(\overline{\Omega})^n)$ таких, что $v|_{(0,T)\times\partial\Omega} = 0$ (см., например, [135]). Поэтому даже для сильных решений, частные производные которых, входящие в уравнение (1.1.3), содержатся в $L_2(0,T;L_2(\Omega))$, траектории движения не определяются однозначно. Один из возможных выходов из этой ситуации – это регуляризация поля скоростей в каждый момент времени t с помощью усреднения по переменной x и определение траекторий $z(\tau;t,x)$ для регуляризованного поля скоростей (см. [28]). Однако, сравнительно недавно (см. напр. [90], [95]) была исследована разрешимость интегральной задачи Коши (1.1.3) в случае, когда скорость v принадлежит пространству Соболева, и установлены существование, единственность и устойчивость регулярных лагранжевых потоков — обобщения понятия классического решения.

Определение 1.1.1. *Регулярным лагранжевым потоком (РЛП), порожденным v, называется функция $z(\tau;t,x)$, $(\tau;t,x) \in [0,T]\times[0,T]\times\overline{\Omega}$, которая удовлетворяет следующим условиям:*

1. *для п. в. $x \in \overline{\Omega}$ и $t \in [0,T]$ функция $\gamma(\tau) = z(\tau;t,x)$ абсолютно непрерывна и удовлетворяет уравнению* (1.1.3)*;*
2. *для любых $t,\tau \in [0,T]$ и произвольного измеримого по Лебегу множества $B \subset \overline{\Omega}$ с мерой Лебега $m(B)$ справедливо равенство $m(z(\tau;t,B)) = m(B)$;*
3. *для всех $t_i \in [0,T]$, $i = 1,2,3$, и почти всех $x \in \overline{\Omega}$ справедливо*

$$z(t_3;t_1,x) = z(t_3;t_2,z(t_2;t_1,x)).$$

Приведем необходимые результаты о РЛП.

Теорема 1.1.1 ([95]). *Пусть $v \in L_1(0,T;W_p^1(\Omega))$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $\operatorname{div} v(t,x) = 0$, $(t,x) \in [0,T]\times\Omega$, и $v|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0$. Тогда существует единственный РЛП $z \in C(D;L)$, порожденный v (где $C(D,L)$ — банахово пространство непрерывных функций на $D = [0,T]\times[0,T]$ со значениями в L — метрическом пространстве измеримых на Ω вектор–функций). Более того, $z(\tau;t,\overline{\Omega}) \subset \overline{\Omega}$ с точностью до множества меры нуль и*

$$\frac{\partial}{\partial\tau} z(\tau;t,x) = v(\tau,z(\tau;t,x)), \quad t,\tau \in [0,T], \quad \textit{при п. в.} \quad x \in \Omega.$$

Теорема 1.1.2. *Пусть v, $v^m \in L_1(0,T;W_1^p(\Omega))$, $m = 1, 2, \ldots$, для некоторого $p > 1$ и $\operatorname{div} v = 0$, $\operatorname{div} v^m = 0$, $v|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0$, $v^m|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0$. Также пусть выполнены следующие неравенства*

$$\|v\|_{L_1(0,T;L_1(\Omega))} + \|v_x\|_{L_1(0,T;L_p(\Omega))} + \|v^m\|_{L_1(0,T;L_1(\Omega))} + \|v_x^m\|_{L_1(0,T;L_p(\Omega))} \leqslant C_0,$$

здесь v_x и v_x^m – матрицы Якоби вектор-функций v и v^m. Пусть v^m сходится к v в $L_1(0,T;L_1(\Omega))$ и $z^m(\tau;t,x)$, $z(\tau;t,x)$ — РЛП, порожденные v^m и v соответственно. Тогда последовательность $z^m(\tau;t,x)$ сходится к $z(\tau;t,x)$ по мере Лебега на $[0,T]\times\Omega$ относительно (τ,x) равномерно по $t \in [0,T]$.

В более общей формулировке этот результат был доказан в [89].

Таким образом, в силу теоремы 1.1.1 для каждого $v \in L_2(0,T;V^1)$ и для почти всех $x \in \Omega$ уравнение (1.1.3) имеет единственное решение $z(v)$, где $z(v)(\tau;t,x) = z(\tau;t,x)$, в классе РЛП.

Сформулируем определение слабого решения для изучаемой альфа–модели (1.1.1)–(1.1.5):

Определение 1.1.2. *Пусть $f \in L_2(0,T;V^{-1})$, $v_0 \in V^0$. Функция $v \in W_1$ называется слабым решением начально–краевой задачи (1.1.1)–(1.1.5), если для всех $\varphi \in V^1$ при почти всех $t \in (0,T)$ она удовлетворяет равенству*

$$\langle v', \varphi\rangle - \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n (\Delta_\alpha^{-1} v)_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx + \mu_0 \int\limits_\Omega \nabla v : \nabla\varphi\, dx +$$

$$+ \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\beta)} \Big(\int\limits_0^t (t-s)^{-\beta} \mathcal{E}(v)(s, z(v)(s;t,x))\, ds, \mathcal{E}(\varphi)\Big) = \langle f, \varphi\rangle, \quad (1.1.6)$$

и начальному условию (1.1.5). Здесь $z(v)$ — РЛП, порожденный v.

Замечание 1.1.1. *Известно (см. [60, Глава III, Лемма 1.1, Лемма 1.4]), что $W \subset C_w(0,T;V^0)$. Следовательно, начальное условие (1.1.5) имеет смысл.*

Замечание 1.1.2. *Заметим, что так как функция $v(t,x) \in L_2(0,T,V^1)$, следовательно $\mathcal{E}(v)(t,x) \in L_2(0,T;L_2(\Omega))$. Однако в интегральном равенстве* (1.1.6) *тензор скоростей деформации $\mathcal{E}(v)$ рассматривается в точке (t,z). Для корректной постановки задачи необходимо уточнить какому функциональному пространству принадлежит тензор $\mathcal{E}(v)(t,z)$*? *Заметим, что траектория z является РЛП, то есть для функции z выполнены условия определения 1.1.1. Рассмотрим произвольную соленоидальную* *функцию v из произвольного измеримого по Лебегу множества $B \subset \overline{\Omega}$ с мерой Лебега $m(B)$ из определения РЛП 1.1.1. В силу 2 свойства определения 1.1.1: $m(B) = m(z(\tau; t, B))$. Тогда для характеристической функции χ_B измеримого множества B выполнено:*

$$\int\limits_{\Omega} \chi_B(y)\, dy = m(m) = m(z(\tau; t, B)) = \int\limits_{\Omega} \chi_B(z(\tau; t, B))\, dx.$$

Таким образом, для любой ступенчатой функции g выполнено:

$$\int\limits_{\Omega} g(y)\, dy = \int\limits_{\Omega} g(z(\tau; t, B))\, dx.$$

Следовательно последнее равенство выполнено и для любой суммируемой функции g. Произведем замену переменных $x = z(s; t, y)$:

$$\Big(\int\limits_0^T \int\limits_{\Omega} |\mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x))|^2\, dx\, dt\Big)^{1/2} = \Big(\int\limits_0^T \int\limits_{\Omega} |\mathcal{E}(v)(s, y)|^2\, dy\, dt\Big)^{1/2}.$$

Следовательно, $\mathcal{E}(v)(t, z) \in L_2(0, T; L_2(\Omega))$.

Основными утверждениями данного параграфа являются следующие

Теорема 1.1.3. *Пусть $f \in L_2(0, T; V^{-1})$, $v_0 \in V^0$. Тогда начально–краевая задача* (1.1.1)–(1.1.5) *имеет хотя бы одно слабое решение $v \in W_1$.*

Теорема 1.1.4. *Пусть выполнены условия теоремы 1.1.3. Кроме того, если рассмотреть семейство альфа–моделей* (1.1.1)–(1.1.5), *зависящих от параметра α_m, то существует последовательность решений v_m семейства альфа–моделей* (1.1.1)–(1.1.5), *которая при стремлении α_m к нулю сходится к слабому решению $v \in W_1$ исходной начально–краевой задачи.*

Доказательство данных теорем состоит из нескольких частей. Сначала на основе аппроксимационно–топологического подхода к исследованию математических задач гидродинамики доказывается существование слабых решений исследуемой альфа–модели. Для этого вводится семейство $(0 \leqslant \xi \leqslant 1)$ вспомогательных задач, зависящих от малого параметра $\varepsilon > 0$, доказываются априорные оценки решений и на основе теории топологической степени для уплотняющих векторных полей доказывается существование слабых решений вспомогательной задачи при $\xi = 1$. Далее, для доказательства разрешимости исследуемой альфа–модели на основе необходимых оценок устанавливается предельный переход. В заключение, показывается, что последовательность решений исследуемой альфа–модели сходится к решению исходной модели, описывающей движение вязкоупругой среды с памятью.

Заметим, что исследование данной математической модели также было продолжено в работе [156], в которой доказано существование оптимального управления с обратной связью для изучаемой задачи.

1.1.2 Семейство вспомогательных задач

Всюду в этом параграфе будем предполагать, что $f \in L_2(0,T;V^{-1})$, $v_0 \in V^3$. Рассмотрим следующее вспомогательное семейство систем уравнений $(0 \leqslant \xi \leqslant 1)$ с малым параметром $\varepsilon > 0$:

$$\varepsilon \frac{\partial \Delta^2 v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial t} + \xi \sum_{i=1}^{n} (\Delta_\alpha^{-1} v)_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \mu_0 \Delta v -$$

$$-\frac{\mu_1 \xi}{\Gamma(1-\beta)} \mathrm{Div} \int_0^t (t-s)^{-\beta} \mathcal{E}(v)\big(s, z(s;t,x)\big)\, ds + \nabla p = \xi f, \tag{1.1.7}$$

$$z(\tau;t,x) = x + \int_t^\tau v\big(s, z(s;t,x)\big)\, ds, \quad t, \tau \in [0,T], \quad x \in \Omega, \tag{1.1.8}$$

$$\operatorname{div} v = 0, \quad t \in [0,T], \quad x \in \Omega, \tag{1.1.9}$$

$$v|_{\partial\Omega} = 0, \quad \Delta v|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \in [0,T] \quad v|_{t=0} = v_0, \quad x \in \Omega. \tag{1.1.10}$$

Для данного семейства рассмотрим еще одно функциональное пространство:

$$W_2 = \{v \in C([0,T]; V^3), \quad v' \in L_2(0,T;V^3)\}$$

с нормой $\|v\|_{W_2} = \|v\|_{C(0,T;V^3)} + \|v'\|_{L_2(0,T;V^3)}$.

Уравнение (1.1.7) включает интеграл, вычисляемый вдоль траекторий движения частиц жидкости. Как было отмечено в предыдущем параграфе необходимо, чтобы траектории однозначно определялись полем скоростей $v(t,x)$. Другими словами, уравнение (1.1.8) должно иметь единственное решение для поля скоростей $v(t,x)$. Заметим, что для семейства вспомогательных задач (1.1.7)–(1.1.10), скорость v из пространства W_2 обладает достаточной гладкостью (в силу вложения пространства V^3 в $C^1(\overline{\Omega})$ для $n = 2, 3$). Таким образом, из [135] следует, что задача Коши (1.1.8) нелокально однозначно разрешима.

По аналогии с определением слабого решения для начально-краевой задачи (1.1.1)–(1.1.5), мы сформулируем определение слабого решения *вспомогательной задачи* (1.1.7)–(1.1.10) при фиксированном $0 \leqslant \xi \leqslant 1$.

Определение 1.1.3. *Функция $v \in W_2$, которая для любого $\varphi \in V^1$ и почти всех $t \in (0, T)$ удовлетворяет равенству*

$$\langle v', \varphi \rangle - \xi \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n (\Delta_\alpha^{-1} v)_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx + \mu_0 \int\limits_\Omega \nabla v : \nabla \varphi \, dx - \varepsilon \int\limits_\Omega \nabla \Delta v' : \nabla \varphi \, dx +$$

$$+ \frac{\mu_1 \xi}{\Gamma(1-\beta)} \Big(\int\limits_0^t (t-s)^{-\beta} \mathcal{E}(v)(s, z(s;t,x))\, ds, \mathcal{E}(\varphi) \Big) = \xi \langle f, \varphi \rangle \qquad (1.1.11)$$

и начальному условию (1.1.10), называется слабым решением вспомогательной задачи (1.1.7)–(1.1.10). Здесь z — траектория, порождаемая скоростью v.

Для доказательства существования слабого решения вспомогательной задачи (1.1.7)–(1.1.10) при $\xi = 1$, перепишем вспомогательное семейство в операторной форме. Используя слагаемые в равенстве (1.1.11), мы введем операторы с помощью следующих равенств:

$$J : V^3 \to V^{-1}, \quad \langle Jv, \varphi \rangle = \int\limits_\Omega v\varphi \, dx, \quad v \in V^3, \quad \varphi \in V^1;$$

$$A : V^1 \to V^{-1}, \quad \langle Av, \varphi \rangle = \int\limits_\Omega \nabla v : \nabla \varphi \, dx, \quad v \in V^1, \quad \varphi \in V^1;$$

$$A_2 : V^3 \to V^{-1}, \quad \langle A_2 v, \varphi \rangle = -\int\limits_\Omega \nabla \Delta v : \nabla \varphi \, dx, \quad v \in V^3, \quad \varphi \in V^1;$$

$$B : L_4(\Omega) \to V^{-1}, \quad \langle B(v), \varphi \rangle = \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n (\Delta_\alpha^{-1} v)_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx, \quad v \in L_4(\Omega),\, \varphi \in V^1;$$

$$C : V^1 \times CG \to V^{-1}, \quad (C(v, z)(t), \varphi) =$$

$$= \Big(\int\limits_0^t (t-s)^{-\beta} \mathcal{E}(v)(s, z(s;t,x))\, ds, \mathcal{E}(\varphi) \Big), \; v \in V^1, \; z \in CG, \; \varphi \in V^1, \; t \in (0, T).$$

Поскольку в (1.1.11) функция $\varphi \in V^1$ произвольна, то при почти всех $t \in (0,T)$ это равенство эквивалентно следующему операторному уравнению, рассматриваемого в $L_2(0,T;V^{-1})$:

$$Jv' + \varepsilon A_2 v' + \mu_0 Av - \xi B(v) + \frac{\mu_1 \xi}{\Gamma(1-\beta)} C(v,z) = \xi f. \qquad (1.1.12)$$

Таким образом, слабое решение вспомогательной задачи (1.1.7)–(1.1.10) при фиксированном $0 \leqslant \xi \leqslant 1$ — это решение $v \in W_2$ операторного уравнения (1.1.12), удовлетворяющее начальному условию (1.1.10).

Также определим операторы при помощи следующих равенств:

$$L : W_2 \to L_2(0,T;V^{-1}) \times V^3, \quad L(v) = ((J + \varepsilon A_2)v' + \mu_0 Av, v|_{t=0});$$

$$K : W_2 \to L_2(0,T;V^{-1}) \times V^3, \quad K(v) = (B(v), 0).$$

$$G : W_2 \to L_2(0,T;V^{-1}) \times V^3, \quad G(v) = (\frac{\mu_1}{\Gamma(1-\beta)} C(v,z), 0).$$

Тогда задача о нахождении решения операторного уравнения (1.1.12) при фиксированном $0 \leqslant \xi \leqslant 1$, удовлетворяющему начальному условию (1.1.10), эквивалентна задаче о нахождении решения при фиксированном $0 \leqslant \xi \leqslant 1$ операторного уравнения

$$L(v) = \xi(K(v) - G(v) + (f, v_0)). \qquad (1.1.13)$$

1.1.3 Свойства операторов

Нам потребуются следующие свойства операторов, входящих в уравнения (1.1.12) и (1.1.13). Чтобы не нагромождать обозначений, мы будем использовать одну и ту же букву для обозначения одних и тех же операторов, действующих в разных функциональных пространствах.

Лемма 1.1.2. *1) Для любой функции $v \in C([0,T];V^3)$ функция Av принадлежит $L_2(0,T;V^{-1})$, оператор $A : C([0,T];V^3) \to L_2(0,T;V^{-1})$ непрерывен и имеют место оценки*

$$\|Av\|_{V^{-1}} \leqslant \|v\|_{V^1}; \quad \|Av\|_{L_2(0,T;V^{-1})} \leqslant \|v\|_{L_2(0,T;V^1)}; \qquad (1.1.14)$$

$$\|Av\|_{L_2(0,T;V^{-1})} \leqslant C_1 \|v\|_{C([0,T];V^3)}. \qquad (1.1.15)$$

2) Оператор $A_2 : V^3 \to V^{-1}$ *— линейный, непрерывный, обратимый и для него имеет место оценка:*

$$\|A_2 v\|_{V^{-1}} \leqslant \|v\|_{V^3}. \qquad (1.1.16)$$

Кроме того, обратный оператор $A_2^{-1} : V^{-1} \to V^3$ *также непрерывен.*
3) Для любой функции $v \in L_p(0,T;V^3)$, $1 \leqslant p < \infty$, *функция* $(J+\varepsilon A_2)v$ *принадлежит* $L_p(0,T;V^{-1})$ *и оператор* $(J+\varepsilon A_2) : L_p(0,T;V^3) \to L_p(0,T;V^{-1})$ *непрерывен и обратим. Кроме того, имеет место оценка*

$$\varepsilon\|v\|_{L_p(0,T;V^3)} \leqslant \|(J+\varepsilon A_2)v\|_{L_p(0,T;V^{-1})} \leqslant C_2(1+\varepsilon)\|v\|_{L_p(0,T;V^3)}. \qquad (1.1.17)$$

Причем обратный к нему оператор $(J+\varepsilon A_2)^{-1} : L_p(0,T;V^{-1}) \to L_p(0,T;V^3)$ *— непрерывен и для любого* $w \in L_p(0,T;V^{-1})$ *имеет место оценка*

$$\|(J+\varepsilon A_2)^{-1} w\|_{L_p(0,T;V^3)} \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\|w\|_{L_p(0,T;V^{-1})}. \qquad (1.1.18)$$

4) Оператор $L : W_2 \to L_2(0,T;V^{-1}) \times V^3$ *обратим и обратный к нему оператор* $L^{-1} : L_2(0,T;V^{-1}) \times V^3 \to W_2$ *является непрерывным оператором.*

Доказательство проводится аналогичным образом как в [32, Лемма 4.4.1, Лемма 4.4.2, Лемма 4.4.3, Лемма 7.7.6].

Лемма 1.1.3. *1) Отображение* $B : L_4(\Omega) \to V^{-1}$ *непрерывно и для него имеет место оценка:*

$$\|B(v)\|_{V^{-1}} \leqslant C_3\|v\|^2_{L_4(\Omega)}. \qquad (1.1.19)$$

2) Для любого $v \in L_4(0,T;L_4(\Omega))$ *функция* $B(v) \in L_2(0,T;V^{-1})$ *и отображение* $B : L_4(0,T;L_4(\Omega)) \to L_2(0,T;V^{-1})$ *— непрерывно.*

3) Для любой функции $v \in W_2$ *функция* $B(v) \in L_2(0,T;V^{-1})$ *и отображение* $B : W_2 \to L_2(0,T;V^{-1})$ *является компактным.*

Доказательство. 1) Для любых $v \in L_4(\Omega)$, $\varphi \in V^1$, используя неравенство Гельдера, мы получим

$$|\langle B(v),\varphi\rangle| = \Bigl|\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_{\Omega}(\Delta_\alpha^{-1}v)_i v_j \frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx\Bigr| \leqslant \sum_{i,j=1}^{n}\Bigl(\int\limits_{\Omega}|(\Delta_\alpha^{-1}v)_i v_j|^2\,dx\Bigr)^{\frac{1}{2}}\times$$

$$\times\Big(\int\limits_{\Omega}\Big|\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\Big|^2\,dx\Big)^{\frac{1}{2}}\leqslant\sum_{i,j=1}^{n}\Big(\int\limits_{\Omega}|(\Delta_\alpha^{-1}v)_i|^4\,dx\Big)^{\frac{1}{4}}\Big(\int\limits_{\Omega}|v_j|^4\,dx\Big)^{\frac{1}{4}}\|\varphi\|_{V^1}\leqslant$$

$$\leqslant C_4\|\Delta_\alpha^{-1}v\|_{L_4(\Omega)}\|v\|_{L_4(\Omega)}\|\varphi\|_{V^1}\leqslant C_4C_5\|v\|^2_{L_4(\Omega)}\|\varphi\|_{V^1}=C_6\|v\|^2_{L_4(\Omega)}\|\varphi\|_{V^1}.$$

Откуда следует неравенство (1.1.19). Отметим, что здесь мы воспользовались следующей известной оценкой (см. [1], [65]):

$$\|\Delta_\alpha^{-1}v\|_{L_p(\Omega)}=\|(I-\alpha^2\Delta)^{-1}v\|_{L_p(\Omega)}\leqslant C_5\|v\|_{L_p(\Omega)},\quad p>1. \tag{1.1.20}$$

Покажем непрерывность отображения $B: L_4(\Omega)\to V^{-1}$. Для произвольных v^m, $v^0\in L_4(\Omega)$ имеем

$$|\langle B(v^m),\varphi\rangle-\langle B(v^0),\varphi\rangle|=$$

$$=\Big|\int\limits_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{n}(\Delta_\alpha^{-1}v^m)_iv_j^m\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx-\int\limits_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{n}(\Delta_\alpha^{-1}v^0)_iv_j^0\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx\Big|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i,j=1}^{n}\|(\Delta_\alpha^{-1}v^m)_iv_j^m-(\Delta_\alpha^{-1}v^0)_iv_j^0\|_{L_2(\Omega)}\Big\|\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\Big\|_{L_2(\Omega)}\leqslant$$

$$\leqslant\|\varphi\|_{V^1}\sum_{i,j=1}^{n}\|(\Delta_\alpha^{-1}v^m)_iv_j^m-(\Delta_\alpha^{-1}v^0)_iv_j^0\|_{L_2(\Omega)}=$$

$$=\|\varphi\|_{V^1}\Big(\sum_{i,j=1}^{n}\|(\Delta_\alpha^{-1}v^m)_iv_j^m-(\Delta_\alpha^{-1}v^m)_iv_j^0+(\Delta_\alpha^{-1}v^m)_iv_j^0-(\Delta_\alpha^{-1}v^0)_iv_j^0\|_{L_2(\Omega)}\Big)\leqslant$$

$$\leqslant\|\varphi\|_{V^1}\Big(\sum_{i,j=1}^{n}\|(\Delta_\alpha^{-1}v^m)_iv_j^m-(\Delta_\alpha^{-1}v^m)_iv_j^0\|_{L_2(\Omega)}+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}\|(\Delta_\alpha^{-1}v^m)_iv_j^0-(\Delta_\alpha^{-1}v^0)_iv_j^0\|_{L_2(\Omega)}\Big)\leqslant$$

$$\leqslant C_7\|\varphi\|_{V^1}\Big(\sum_{j=1}^{n}\|\Delta_\alpha^{-1}v^m\|_{L_4(\Omega)}\|v_j^m-v_j^0\|_{L_4(\Omega)}+$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\|\Delta_\alpha^{-1}(v^m-v^0)\|_{L_4(\Omega)}\|v_j^0\|_{L_4(\Omega)}\Big)\leqslant$$

$$\leqslant C_7C_5\|\varphi\|_{V^1}\Big(\sum_{j=1}^{n}\|v^m\|_{L_4(\Omega)}\|v_j^m-v_j^0\|_{L_4(\Omega)}+\sum_{j=1}^{n}\|v^m-v^0\|_{L_4(\Omega)}\|v_j^0\|_{L_4(\Omega)}\Big)\leqslant$$

$$\leqslant C_8(\|v^m\|_{L_4(\Omega)}\|v^m-v^0\|_{L_4(\Omega)}+\|v^m-v^0\|_{L_4(\Omega)}\|v^0\|_{L_4(\Omega)})\|\varphi\|_{V^1}=$$

$$=C_8(\|v^m\|_{L_4(\Omega)}+\|v^0\|_{L_4(\Omega)})\|v^m-v^0\|_{L_4(\Omega)}\|\varphi\|_{V^1}.$$

Таким образом,

$$\|B(v^m) - B(v^0)\|_{V^{-1}} \leqslant C_8(\|v^m\|_{L_4(\Omega)} + \|v^0\|_{L_4(\Omega)})\|v^m - v^0\|_{L_4(\Omega)}.$$

Полагая $v^m \to v^0$ в $L_4(\Omega)$, получаем, что отображение $B : L_4(\Omega) \to V^{-1}$ является непрерывным.

2) Для доказательства необходимо воспользоваться последней оценкой и повторить доказательство леммы 2.5.4 (пункт 2) из [32].

3) Для доказательства этого пункта воспользуемся теоремой Симона:

Теорема 1.1.5 (Симон, [144]). *Пусть $X \subset E \subset Y$ — банаховы пространства, причем вложение $X \subset E$ компактно, а вложение $E \subset Y$ непрерывно. Пусть $F \subset L_p(0,T;X)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Будем предполагать, что для любого $f \in F$ его обобщенная производная в пространстве $D'(0,T;Y)$ принадлежит $L_r(0,T;Y)$, $1 \leqslant r \leqslant \infty$. Далее, пусть*

1. *множество F ограничено в $L_p(0,T;X)$,*
2. *множество $\{f' : f \in F\}$ ограничено в $L_r(0,T;Y)$.*

Тогда при $p < \infty$ множество F относительно компактно в $L_p(0,T;E)$, а при $p = \infty$ и $r > 1$ множество F относительно компактно в $C([0,T],E)$.

Рассмотрим множество $F = \{v \in L_4(0,T;V^3), v' \in L_2(0,T;L_2(\Omega))\}$. Так как вложение $V^3 \subset L_4(\Omega)$ является компактным, то компактным является вложение $F \subset L_4(0,T;L_4(\Omega))$.

Из непрерывных вложений

$$C([0,T];V^3) \subset L_4(0,T;V^3), \quad L_2(0,T;V^3) \subset L_2(0,T;L_2(\Omega))$$

следует непрерывное вложение $W_2 \subset F$. Кроме того, из второго пункта настоящей леммы мы имеем, что оператор $B : L_4(0,T;L_4(\Omega)) \to L_2(0,T;V^{-1})$ является непрерывным. Таким образом, имеем следующую суперпозицию вложений:

$$W_2 \subset F \subset L_4(0,T;L_4(\Omega)) \xrightarrow{B} L_2(0,T;V^{-1}),$$

где первое вложение непрерывно, второе — компактно и отображение B — непрерывно. Следовательно, для любой функции $v \in W_2$ получим, что функция $B(v) \in L_2(0,T;V^{-1})$, а отображение $B : W_2 \to L_2(0,T;V^{-1})$ — компактно. Лемма доказана. $\square$

Перейдем к изучению свойств отображения C. Введем норму $\|v\|_{k,L_2(0,T;V^{-1})}$, равную норме $\|\overline{v}\|_{L_2(0,T;V^{-1})}$, где $\overline{v}(t) = e^{-kt}v(t)$, $k \geqslant 0$. Тогда имеет место следующая лемма

Лемма 1.1.4. *Для любых* $v \in L_2(0,T;V^1)$, $z \in CG$, *выполнено* $C(v,z) \in L_2(0,T;V^{-1})$ *и отображение* $C : L_2(0,T;V^1) \times CG \to L_2(0,T;V^{-1})$ *непрерывно и ограничено. Кроме того, для любой фиксированной функции* $z \in CG$ *и произвольных* u, $v \in L_2(0,T;V^1)$ *справедлива оценка*

$$\|C(v,z) - C(u,z)\|_{k,L_2(0,T;V^{-1})} \leqslant C_9 T^{1-\beta}\sqrt{T/k}\|v-u\|_{k,L_2(0,T;V^1)}. \qquad (1.1.21)$$

Доказательство. Первая часть данной леммы доказывается аналогично лемме 2.2 [28]. Докажем необходимую оценку (1.1.21). Пусть $\overline{v}(t) = e^{-kt}v(t), \overline{u}(t) = e^{-kt}u(t)$. По определению для $\varphi \in L_2(0,T,V^1)$ имеем

$$\langle e^{-kt}C(v,z)(t) - e^{-kt}C(u,z)(t), \varphi(t)\rangle =$$
$$= \int_0^T\int_\Omega\int_0^t e^{-k(t-s)}(t-s)^{-\beta}\mathcal{E}_{ij}(\overline{v}-\overline{u})(s,z(s;t,x))\,ds\,\mathcal{E}_{ij}(\varphi)(t)\,dx\,dt.$$

Тогда с помощью неравества Гельдера получим

$$\langle e^{-kt}C(v,z)(t) - e^{-kt}C(u,z)(t), \varphi(t)\rangle \le$$
$$\le \int_0^T\int_0^t e^{-k(t-s)}(t-s)^{-\beta}\Big(\int_\Omega \mathcal{E}^2(\overline{v}-\overline{u})(s,z(s;t,x))\,dx\Big)^{1/2}\times$$
$$\times\Big(\int_\Omega \mathcal{E}^2(\varphi)(t,x)\,dx\Big)^{1/2}ds\,dt =$$
$$= \int_0^T\int_0^t e^{-k(t-s)}(t-s)^{-\beta}\|(\overline{v}-\overline{u})(s,\cdot)\|_{V^1}\|\varphi(t,\cdot)\|_{V^1}\,ds\,dt \le$$
$$\le C_9T^{1-\beta}\|\overline{v}-\overline{u}\|_{L_2(0,T;V^1)}\|\varphi\|_{L_2(0,T;V^1)}\big(\int_0^T\int_0^t e^{-k(t-s)}\,ds\,dt\big)^{1/2}.$$

Последнее неравенство выполнено в силу оценки (см. теорему 2.6 [57])

$$\|\int_0^t(t-s)^{-\beta}\varphi(s)\,ds\|_{L_p(0,T)} \le C_9T^{1-\beta}\|\varphi(s)\|_{L_p(0,T)},\ \varphi(s) \in L_p(0,T),\ 1 \le p < \infty.$$

Оценим оставшийся интеграл:

$$\Big(\int\limits_0^T\int\limits_0^t e^{-k(t-s)}\,ds\,dt\Big)^{1/2} = \frac{1}{k}\int\limits_0^T 1-e^{-kt}\,dt \leq \frac{1}{k}\int\limits_0^T dt = \frac{T}{k}.$$

Таким образом получим оценку

$$\langle e^{-kt}C(v,z)(t) - e^{-kt}C(u,z)(t), \varphi(t)\rangle \leq$$
$$\leq C_9 T^{1-\beta}\sqrt{T/k}\|\overline{v}-\overline{u}\|_{L_2(0,T;V^1)}\|\varphi\|_{L_2(0,T;V^1)}.$$

Откуда и следует требуемая оценка (1.1.21). □

Сформулируем еще одно необходимое свойство оператора C.

Но прежде определим несколько понятий, касающихся меры некомпактности и L–уплотняющих операторов (см. [18], [56]).

Определение 1.1.4. *Неотрицательная вещественная функция ψ, определенная на подмножестве банахова пространства F, называется мерой некомпактности, если для любого подмножества $\mathcal{M}$ этого пространства выполнены следующие свойства:*

1) $\psi(\overline{co}\,\mathcal{M}) = \psi(\mathcal{M})$;

2) для любых двух множеств $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ из $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2$ следует, что $\psi(\mathcal{M}_1) \leqslant \psi(\mathcal{M}_2)$.

Здесь, через $\overline{co}\,\mathcal{M}$ обозначается выпуклое замыкание множества $\mathcal{M}$. В качестве примера меры некомпактности мы приведем меру некомпактности Куратовского: точная нижняя граница $d > 0$, для которого множество $\mathcal{M}$ допускает разбиение на конечное число подмножеств, диаметры которых меньше d. Мера некомпактности Куратовского имеет несколько важных свойств:

3) $\psi(\mathcal{M}) = 0$, если $\mathcal{M}$ относительно компактное подмножество;

4) $\psi(\mathcal{M}\cup K) = \psi(\mathcal{M})$, если K относительно компактное множество.

Определение 1.1.5. *Пусть X — ограниченное подмножество банахова пространства и $L : X \to F$ — отображение X в банахово пространство F. Отображение $g : X \to F$ называется L-уплотняющим, если $\psi(g(\mathcal{M})) < \psi(L(\mathcal{M}))$ для любого множества $\mathcal{M} \subseteq X$ такого, что $\psi(g(\mathcal{M})) \neq 0$.*

Пусть γ_k — мера некомпактности Куратовского в пространстве $L_2(0,T;V^{-1})$ с нормой $\|v\|_{k,L_2(0,T;V^{-1})}$. Тогда имеет место следующая лемма

Лемма 1.1.5. *Отображение $G : W_2 \to L_2(0,T;V^{-1}) \times V^3$ является L–уплотняющим по мере некомпактности Куратовского γ_k.*

Доказательство. Пусть $M \subset W_2 \subset L_2(0,T;V^1)$ — произвольное ограниченное множество. В силу теоремы 1.1.2 множество $z(M)$ — множество траекторий z, однозначно определяемым по скоростям $v \in M$, относительно компактно. Тогда множество $C(v, z(M))$ относительно компактно для любого фиксированного $v \in W_2$. Кроме того, для любых $z \in z(M)$ отображение $C(\cdot, z)$ удовлетворяет условию Липшица с константой $C_9 T^{1-\beta}\sqrt{T/k}$ в нормах $\|\cdot\|_{k,L_2(0,T,V^1)}$ и $\|\cdot\|_{k,L_2(0,T,V^{-1})}$. Тогда по теореме 1.5.7 [7] отображение $C(v,z)$, а значит, и отображение G являются $C_9 T^{1-\beta}\sqrt{T/k}$–ограниченным относительно меры некомпактности Хаусдорфа χ_k. Известно, см. теорему 1.1.7 [7], что меры некомпактности Хаусдорфа и Куратовского удовлетворяют неравенствам $\chi_k(M) \leq \gamma_k(M) \leq 2\chi_k(M)$. Поэтому справедлива оценка

$$\gamma_k(G(M)) \leq C_9 T^{1-\beta}\sqrt{T/k}\gamma_k(L(M)).$$

Выбирая k так, чтобы $C_9 T^{1-\beta}\sqrt{T/k} < 1$ получаем утверждение леммы. □

Используя полученные выше оценки и свойства операторов, докажем следующие априорные оценки для вспомогательного семейства (1.1.7)–(1.1.10).

1.1.4 Априорные оценки

Лемма 1.1.6. *Пусть $v_0 \in V^3$, $f \in L_2(0,T;V^{-1})$. Тогда для любого решения $v \in W_2$ операторного уравнения (1.1.12) имеют место оценки:*

$$\|v\|_{L_2(0,T;V^1)} \leqslant C_{10}(\|v_0\|_{V^0} + \sqrt{\varepsilon}\|v_0\|_{V^2} + \|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}); \tag{1.1.22}$$

$$\|v\|_{C([0,T];V^0)} \leqslant C_{11}(\|v_0\|_{V^0} + \sqrt{\varepsilon}\|v_0\|_{V^2} + \|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}); \tag{1.1.23}$$

$$\varepsilon\|v\|^2_{C([0,T];V^2)} \leqslant C_{12}(\|v_0\|^2_{V^0} + \varepsilon\|v_0\|^2_{V^2} + \|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})}), \tag{1.1.24}$$

где постоянные C_{10}, C_{11}, C_{12} не зависят от ε и ξ.

Доказательство. Пусть $v \in W_2$ — решение операторного уравнения (1.1.12). Тогда при любом $\varphi \in V^1$ и почти всех $t \in (0,T)$ имеет место равенство (1.1.11). Поскольку оно справедливо при всех $\varphi \in V^1$, то положим $\varphi = \overline{v}$, где

$\overline{v}(t) = e^{-kt}v(t)$. Тогда, получим

$$\int\limits_\Omega v'(t)\overline{v}(t)\,dx - \xi\int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n (\Delta_\alpha^{-1}v)_i(t)v_j(t)\frac{\partial \overline{v}_j(t)}{\partial x_i}\,dx + \mu_0\int\limits_\Omega \nabla v(t) : \nabla\overline{v}(t)\,dx +$$
$$+\frac{\mu_1\xi}{\Gamma(1-\beta)}\Big(\int\limits_0^t (t-s)^{-\beta}\mathcal{E}(v)(s, z(s;t,x))\,ds, \mathcal{E}(\overline{v}(t))\Big) -$$
$$-\varepsilon\int\limits_\Omega \nabla\Delta v'(t) : \nabla\overline{v}(t)\,dx = \xi\langle f(t), \overline{v}(t)\rangle. \tag{1.1.25}$$

Выполним замену $v(t) = e^{kt}\overline{v}(t)$ и отдельно преобразуем слагаемые в левой части последнего равенства следующим образом. Рассмотрим первое слагаемое:

$$\int\limits_\Omega v'(t)\overline{v}(t)\,dx = \int\limits_\Omega (e^{kt}\overline{v}(t))'\overline{v}(t)\,dx = e^{kt}\int\limits_\Omega \overline{v}'(t)\overline{v}(t)\,dx + ke^{kt}\int\limits_\Omega \overline{v}(t)\overline{v}(t)\,dx =$$
$$= \frac{e^{kt}}{2}\int\limits_\Omega \frac{\partial(\overline{v}(t)\overline{v}(t))}{\partial t}\,dx + ke^{kt}\|\overline{v}(t)\|^2_{V^0} = \frac{e^{kt}}{2}\frac{d}{dt}\|\overline{v}(t)\|^2_{V^0} + ke^{kt}\|\overline{v}(t)\|^2_{V^0}.$$

Теперь перейдем к рассмотрению следующего слагаемого:

$$\int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n (\Delta_\alpha^{-1}v)_i(t)v_j(t)\frac{\partial\overline{v}_j(t)}{\partial x_i}\,dx = e^{kt}\int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n (\Delta_\alpha^{-1}v)_i(t)\overline{v}_j(t)\frac{\partial\overline{v}_j(t)}{\partial x_i}\,dx =$$
$$= \frac{e^{kt}}{2}\int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n (\Delta_\alpha^{-1}v)_i(t)\frac{\partial(\overline{v}_j(t)\overline{v}_j(t))}{\partial x_i}\,dx = -\frac{e^{kt}}{2}\int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial(\Delta_\alpha^{-1}v)_i(t)}{\partial x_i}\overline{v}_j^2(t)\,dx =$$
$$= -\frac{e^{kt}}{2}\int\limits_\Omega \sum_{j=1}^n \operatorname{div} u(t)\overline{v}_j^2(t)\,dx = 0.$$

Наконец, преобразуем последнее слагаемое:

$$-\varepsilon\int\limits_\Omega \nabla\Delta v'(t) : \nabla\overline{v}(t)\,dx = -\varepsilon\int\limits_\Omega \nabla\Delta(e^{kt}\overline{v}(t))' : \nabla\overline{v}(t)\,dx =$$
$$-\varepsilon ke^{kt}\int\limits_\Omega \nabla\Delta\overline{v}(t) : \nabla\overline{v}(t)\,dx - \varepsilon e^{kt}\int\limits_\Omega \nabla\Delta\overline{v}'(t) : \nabla\overline{v}(t)\,dx =$$
$$= \varepsilon ke^{kt}\int\limits_\Omega \Delta\overline{v}(t)\Delta\overline{v}(t)\,dx + \frac{\varepsilon e^{kt}}{2}\int\limits_\Omega \frac{\partial}{\partial t}\Big(\Delta\overline{v}(t)\Delta\overline{v}(t)\Big)\,dx =$$

$$= \varepsilon k e^{kt} \|\overline{v}(t)\|^2_{V^2} + \frac{\varepsilon e^{kt}}{2} \frac{d}{dt} \|\overline{v}(t)\|^2_{V^2}.$$

Таким образом, равенство (1.1.25) можно переписать в виде:

$$\frac{e^{kt}}{2}\frac{d}{dt}\|\overline{v}(t)\|^2_{V^0} + ke^{kt}\|\overline{v}(t)\|^2_{V^0} + \mu_0 e^{kt}\|\overline{v}(t)\|^2_{V^1} + \varepsilon k e^{kt}\|\overline{v}(t)\|^2_{V^2} +$$

$$+\frac{\varepsilon e^{kt}}{2}\frac{d}{dt}\|\overline{v}(t)\|^2_{V^2} = -\frac{\mu_1 \xi}{\Gamma(1-\beta)}\Big(\int\limits_0^t (t-s)^{-\beta}\mathcal{E}(e^{kt}\overline{v})(s, z(s;t,x))\,ds, \mathcal{E}(\overline{v}(t))\Big) +$$

$$+\xi e^{kt}\langle f(t), \overline{v}(t)\rangle. \tag{1.1.26}$$

Оценим по модулю правую часть полученного равенства. Воспользовавшись неравенством Коши

$$bc \leqslant \frac{\delta b^2}{2} + \frac{c^2}{2\delta}$$

для $\delta = 1/\mu_0$, мы получим:

$$\xi e^{kt}\langle f(t), \overline{v}(t)\rangle \leqslant e^{kt}\|f(t)\|_{V^{-1}}\|\overline{v}(t)\|_{V^1} \leqslant \frac{e^{kt}}{2\mu_0}\|f(t)\|^2_{V^{-1}} + \frac{\mu_0 e^{kt}}{2}\|\overline{v}(t)\|^2_{V^1}.$$

Умножая обе части равенства (1.1.26) на e^{-kt}, при почти всех $t \in (0,T)$ имеем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\overline{v}(t)\|^2_{V^0} + \frac{\varepsilon}{2}\frac{d}{dt}\|\overline{v}(t)\|^2_{V^2} + k\|\overline{v}(t)\|^2_{V^0} + \frac{\mu_0}{2}\|\overline{v}(t)\|^2_{V^1} + \varepsilon k\|\overline{v}(t)\|^2_{V^2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\beta)}\left|\Big(e^{-kt}\int\limits_0^t (t-s)^{-\beta}\mathcal{E}(e^{kt}\overline{v})(s, z(s;t,x))\,ds, \mathcal{E}(\overline{v}(t))\Big)\right| + \frac{1}{2\mu_0}\|f(t)\|^2_{V^{-1}}.$$

Проинтегрируем от 0 до τ, где $\tau \in [0,T]$, последнее неравенство по t. Тогда

$$\frac{1}{2}\|\overline{v}(t)\|^2_{V^0} + \frac{\varepsilon}{2}\|\overline{v}(t)\|^2_{V^2} + k\int\limits_0^\tau \|\overline{v}(t)\|^2_{V^0}\,dt + \varepsilon k\int\limits_0^\tau \|\overline{v}(t)\|^2_{V^2}\,dt +$$

$$+\frac{\mu_0}{2}\int\limits_0^\tau \|\overline{v}(t)\|^2_{V^1}\,dt \leqslant \frac{1}{2}\|v_0\|^2_{V^0} + \frac{\varepsilon}{2}\|v_0\|^2_{V^2} + \frac{1}{2\mu_0}\int\limits_0^\tau \|f(t)\|^2_{V^{-1}}\,dt +$$

$$+\frac{\mu_1}{\Gamma(1-\beta)}\int\limits_0^\tau \left|\Big(e^{-kt}\int\limits_0^t (t-s)^{-\beta}\mathcal{E}(e^{kt}\overline{v})(s, z(s;t,x))\,ds, \mathcal{E}(\overline{v}(t))\Big)\right| dt.$$

Воспользуемся оценкой (1.1.21) для $u = 0$. Таким образом,

$$\frac{1}{2}\|\overline{v}(t)\|^2_{V^0} + \frac{\varepsilon}{2}\|\overline{v}(t)\|^2_{V^2} + k\int\limits_0^\tau \|\overline{v}(t)\|^2_{V^0}\,dt + \varepsilon k\int\limits_0^\tau \|\overline{v}(t)\|^2_{V^2}\,dt +$$

$$+\frac{\mu_0}{2}\int\limits_0^\tau \|\overline{v}(t)\|^2_{V^1}\,dt \leqslant \frac{1}{2}\|v_0\|^2_{V^0} + \frac{\varepsilon}{2}\|v_0\|^2_{V^2} + \frac{\mu_1 C_9 T^{1-\beta}\sqrt{T/(2k)}}{\Gamma(1-\beta)}\|\overline{v}\|^2_{L_2(0,T;V^1)} +$$

$$+\frac{1}{2\mu_0}\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})}.$$

Будем считать число k достаточно большим таким, что $\dfrac{\mu_1 C_9 T^{1-\beta}\sqrt{T/(2k)}}{\Gamma(1-\beta)} \leqslant \mu_0/4$. Из неотрицательности величин $\|\overline{v}(t)\|^2_{V^0}$, $\|\overline{v}(t)\|^2_{V^2}$ и $\|\overline{v}(t)\|^2_{V^1}$ следуют оценки:

$$\frac{\mu_0}{2}\int\limits_0^\tau \|\overline{v}(t)\|^2_{V^1}\,dt \leqslant \frac{1}{2}\|v_0\|^2_{V^0} + \frac{\varepsilon}{2}\|v_0\|^2_{V^2} + \frac{1}{2\mu_0}\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} + \frac{\mu_0}{4}\|\overline{v}\|^2_{L_2(0,T;V^1)},$$

$$\frac{\varepsilon}{2}\|\overline{v}(t)\|^2_{V^2} \leqslant \frac{1}{2}\|v_0\|^2_{V^0} + \frac{\varepsilon}{2}\|v_0\|^2_{V^2} + \frac{1}{2\mu_0}\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} + \frac{\mu_0}{4}\|\overline{v}\|^2_{L_2(0,T;V^1)},$$

$$\frac{1}{2}\|\overline{v}(t)\|^2_{V^0} \leqslant \frac{1}{2}\|v_0\|^2_{V^0} + \frac{\varepsilon}{2}\|v_0\|^2_{V^2} + \frac{1}{2\mu_0}\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} + \frac{\mu_0}{4}\|\overline{v}\|^2_{L_2(0,T;V^1)}.$$

Так как правая часть во всех приведенных неравенствах не зависит от τ, то перейдем в левых частях этих неравенств к максимуму по $\tau \in [0,T]$. Тогда

$$\frac{\mu_0}{2}\|\overline{v}\|^2_{L_2(0,T;V^1)} \leqslant \frac{1}{2}\|v_0\|^2_{V^0} + \frac{\varepsilon}{2}\|v_0\|^2_{V^2} + \frac{1}{2\mu_0}\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} + \frac{\mu_0}{4}\|\overline{v}\|^2_{L_2(0,T;V^1)},$$

$$\frac{\varepsilon}{2}\|\overline{v}\|^2_{C([0,T];V^2)} \leqslant \frac{1}{2}\|v_0\|^2_{V^0} + \frac{\varepsilon}{2}\|v_0\|^2_{V^2} + \frac{1}{2\mu_0}\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} + \frac{\mu_0}{4}\|\overline{v}\|^2_{L_2(0,T;V^1)},$$

$$\frac{1}{2}\|\overline{v}\|^2_{C([0,T];V^0)} \leqslant \frac{1}{2}\|v_0\|^2_{V^0} + \frac{\varepsilon}{2}\|v_0\|^2_{V^2} + \frac{1}{2\mu_0}\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} + \frac{\mu_0}{4}\|\overline{v}\|^2_{L_2(0,T;V^1)}.$$

Отсюда непосредственно следуют требуемые оценки (1.1.22)–(1.1.24). Лемма доказана. □

Лемма 1.1.7. *Пусть $v_0 \in V^3$, $f \in L_2(0,T;V^{-1})$. Тогда для любого $v \in W_2$ операторного уравнения (1.1.12) имеют место оценки*

$$\varepsilon\|v'\|_{L_2(0,T;V^3)} \leqslant C_{13}\Big(1 + \frac{1}{\varepsilon}\Big)\Big(\|v_0\|^2_{V^0} + \|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})}\Big) +$$

$$+ C_{13}\sqrt{\varepsilon}\|v_0\|_{V^2} + C_{13}\|v_0\|^2_{V^2}; \qquad (1.1.27)$$

$$\|v\|_{C([0,T];V^3)} \leqslant \|v_0\|_{V^3} + \frac{C_{13}T^{\frac{1}{2}}}{\varepsilon}\Big(1+\frac{1}{\varepsilon}\Big)\Big(\|v_0\|^2_{V^0} + \|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})}\Big) + \\ + \frac{C_{13}T^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\varepsilon}}\|v_0\|_{V^2} + \frac{C_{13}T^{\frac{1}{2}}}{\varepsilon}\|v_0\|^2_{V^2}; \qquad (1.1.28)$$

$$\|v'\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} \leqslant C_{14}(\|v_0\|^2_{V^0} + \varepsilon\|v_0\|^2_{V^2} + \|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} + 1); \qquad (1.1.29)$$

$$\varepsilon\|v'\|_{L_{4/3}(0,T;V^3)} \leqslant C_{15}(\|v_0\|^2_{V^0} + \varepsilon\|v_0\|^2_{V^2} + \|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} + 1); \qquad (1.1.30)$$

где постоянные C_{13}, C_{14}, C_{15} не зависят от ε, v и ξ.

Доказательство. Пусть $v \in W_2$ — решение (1.1.12). Тогда оно удовлетворяет следующему операторному уравнению

$$Jv' + \varepsilon A_2 v' + \mu_0 Av - \xi B(v) + \frac{\mu_1\xi}{\Gamma(1-\beta)}C(v,z) = \xi f. \qquad (1.1.31)$$

Следовательно,

$$\|(J+\varepsilon A_2)v'\|_{L_2(0,T;V^{-1})} = \|\xi f + \xi B(v) - \mu_0 Av - \frac{\mu_1\xi}{\Gamma(1-\beta)}C(v,z)\|_{L_2(0,T;V^{-1})}.$$

Оценим правую часть последнего равенства. В силу оценок (1.1.14) и (1.1.21) для $u=0$, мы получим:

$$\|\xi f + \xi B(v) - \mu_0 Av - \frac{\mu_1\xi}{\Gamma(1-\beta)}C(v,z)\|_{L_2(0,T;V^{-1})} \leqslant \|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \\ + \|B(v)\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \frac{\mu_1 C_9 T^{1-\beta}}{\Gamma(1-\beta)}\|v\|_{L_2(0,T;V^1)} + \mu_0\|v\|_{L_2(0,T;V^1)}. \qquad (1.1.32)$$

Отдельно оценим величину $\|B(v)\|_{L_2(0,T;V^{-1})}$. Используя (1.1.19), а также непрерывность вложения $V^2 \subset L_4(\Omega)$, имеем:

$$\|B(v)\|_{L_2(0,T;V^{-1})} = \Big(\int_0^T \|B(v)\|^2_{V^{-1}}\,dt\Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant C_3\Big(\int_0^T \|v(t)\|^4_{L_4(\Omega)}\,dt\Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant \\ \leqslant C_{16}\Big(\int_0^T \|v(t)\|^4_{V^2}\,dt\Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant C_{16}T^{\frac{1}{2}}\max_{t\in[0,T]}\|v(t)\|^2_{V^2} = C_{16}T^{\frac{1}{2}}\|v\|^2_{C([0,T];V^2)}.$$

Перепишем неравенство (1.1.32) в следующем виде

$$\|\xi f + \xi B(v) - \mu_0 Av - \frac{\mu_1\xi}{\Gamma(1-\beta)}C(v,z)\|_{L_2(0,T;V^{-1})} \leqslant \\ \leqslant C_{17}(\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + C_{16}T^{1/2}\|v\|^2_{C([0,T];V^2)} + \|v\|_{L_2(0,T;V^1)}).$$

Из априорных оценок (1.1.22) и (1.1.24) непосредственно следует, что

$$\|(J+\varepsilon A_2)v'\|_{L_2(0,T;V^{-1})} \leqslant C_{13}\Big(1+\frac{1}{\varepsilon}\Big)\Big(\|v_0\|^2_{V^0}+\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})}\Big)+ \\ + C_{13}\sqrt{\varepsilon}\|v_0\|_{V^2}+C_{13}\|v_0\|^2_{V^2}.$$

Для доказательства оценки (1.1.27) осталось воспользоваться левой частью оценки (1.1.17) для $p=2$:

$$\varepsilon\|v'\|_{L_2(0,T;V^3)} \leqslant \|(J+\varepsilon A_2)v'\|_{L_2(0,T;V^{-1})} \leqslant \\ \leqslant C_{13}\Big(1+\frac{1}{\varepsilon}\Big)\Big(\|v_0\|^2_{V^0}+\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})}\Big)+C_{13}\sqrt{\varepsilon}\|v_0\|_{V^2}+C_{13}\|v_0\|^2_{V^2}.$$

Следовательно, установлено неравенство (1.1.27).

Перейдем к доказательству оценки (1.1.28). Представим функцию $v\in W_2$ следующим образом:

$$v(t)=v_0-\int\limits_0^t v'(s)\,ds.$$

Тогда

$$\|v(t)\|_{V^3} \leqslant \Big\|v_0-\int\limits_0^t v'(s)\,ds\Big\|_{V^3} \leqslant \|v_0\|_{V^3}+\int\limits_0^t \|v'(s)\|_{V^3}\,ds \leqslant \\ \leqslant \|v_0\|_{V^3}+T^{\frac{1}{2}}\|v'\|_{L_2(0,T;V^3)}.$$

Так как правая часть полученного неравенства не зависит от t, то перейдем к максимуму по $\tau\in[0,T]$ в левой части. Тогда с учетом оценки (1.1.27) получим

$$\max_{t\in[0,T]}\|v(t)\|_{V^3} \leqslant \|v_0\|_{V^3}+\frac{C_{13}T^{\frac{1}{2}}}{\varepsilon}\Big(1+\frac{1}{\varepsilon}\Big)\Big(\|v_0\|^2_{V^0}+\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})}\Big)+ \\ +\frac{C_{13}T^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\varepsilon}}\|v_0\|_{V^2}+\frac{C_{13}T^{\frac{1}{2}}}{\varepsilon}\|v_0\|^2_{V^2}.$$

Таким образом, установлена оценка (1.1.28).

Теперь мы докажем неравенство (1.1.29). Как и ранее $v\in W_2$ — решение операторного уравнения (1.1.31). Тогда

$$\|v'\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} \leqslant \|\xi f+\xi B(v)-\mu_0 Av-\frac{\mu_1\xi}{\Gamma(1-\beta)}C(v,z)-\varepsilon A^2 v'\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} \leqslant$$

$$\leqslant \|f\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} + \|B(v)\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} + \mu_0\|Av\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} + \\ + \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\beta)}\|C(v,z)\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} + \varepsilon\|A^2v'\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})}. \tag{1.1.33}$$

Отдельно рассмотрим слагаемые в правой части последнего неравенства. Сначала установим оценку на $\|B(v)\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})}$. Учитывая известное неравенство для $n = 3$ (см. [60, Лемма III.3.5])

$$\|u\|_{L_4(\Omega)} \leqslant 2^{\frac{1}{2}}\|u\|^{\frac{1}{4}}_{L_2(\Omega)}\|\nabla u\|^{\frac{3}{4}}_{L_2(\Omega)}, \quad u \in V^1,$$

и оценку (1.1.19), мы получим (для случая $n = 2$ доказательство аналогичное):

$$\|B(v)\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} = \Big(\int\limits_0^T \|B(v)\|^{\frac{4}{3}}_{V^{-1}}\,dt\Big)^{\frac{3}{4}} \leqslant C_3\Big(\int\limits_0^T \|v\|^{\frac{8}{3}}_{L_4(\Omega)}\,dt\Big)^{\frac{3}{4}} \leqslant$$

$$\leqslant 2C_3\Big(\int\limits_0^T \|v\|^{\frac{2}{3}}_{L_2(\Omega)}\|\nabla v\|^2_{L_2(\Omega)}\,dt\Big)^{\frac{3}{4}} \leqslant C_{18}\Big(\int\limits_0^T \|v\|^{\frac{2}{3}}_{V^0}\|v\|^2_{V^1}\,dt\Big)^{\frac{3}{4}} \leqslant$$

$$\leqslant C_{18}\|v\|^{\frac{1}{2}}_{C([0,T];V^0)}\Big(\int\limits_0^T \|v\|^2_{V^1}\,dt\Big)^{\frac{3}{4}} = C_{18}\|v\|^{\frac{1}{2}}_{C([0,T];V^0)}\|v\|^{\frac{3}{2}}_{L_2(0,T;V^1)}. \tag{1.1.34}$$

Рассмотрим следующее слагаемое. Воспользуемся неравенством Гельдера и оценкой (1.1.14). Тогда

$$\|Av\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} = \Big(\int\limits_0^T \|Av\|^{\frac{4}{3}}_{V^{-1}}\,dt\Big)^{\frac{3}{4}} \leqslant \Big(\int\limits_0^T \|v\|^{\frac{4}{3}}_{V^1}\,dt\Big)^{\frac{3}{4}} \leqslant$$

$$\leqslant T^{\frac{1}{4}}\Big(\int\limits_0^T \|v\|^2_{V^1}\,dt\Big)^{\frac{1}{2}} = T^{\frac{1}{4}}\|v\|_{L_2(0,T;V^1)}. \tag{1.1.35}$$

Аналогичным образом с помощью неравенства Гельдера и оценки (1.1.21) для $u = 0$ мы получим оценку на очередное слагаемое:

$$\|C(v,z)\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} = \Big(\int\limits_0^T \|C(v,z)\|^{\frac{4}{3}}_{V^{-1}}\,dt\Big)^{\frac{3}{4}} \leqslant T^{\frac{1}{4}}\Big(\int\limits_0^T \|C(v,z)\|^2_{V^{-1}}\,dt\Big)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= T^{\frac{1}{4}}\|C(v,z)\|_{L_2(0,T;V^{-1})} \leqslant T^{\frac{1}{4}}T^{1-\beta}C_9\|v\|_{L_2(0,T;V^1)}.$$

Наконец, рассмотрим последнее слагаемое. Используя неравенство (1.1.16), получим:

$$\varepsilon\|A^2v'\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} = \varepsilon\bigg(\int\limits_0^T \|A^2v'\|^{\frac{4}{3}}_{V^{-1}}\,dt\bigg)^{\frac{3}{4}} \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon\bigg(\int\limits_0^T \|v'\|^{\frac{4}{3}}_{V^3}\,dt\bigg)^{\frac{3}{4}} \leqslant \varepsilon\|v'\|_{L_{4/3}(0,T;V^3)}.$$

Оценим величину в правой части последнего неравенства. Для этого воспользуемся левой частью оценки (1.1.18) для $p = 4/3$. Таким образом, для получения оценки на $\varepsilon\|v'\|_{L_{4/3}(0,T;V^3)}$ необходимо получить оценку на величину $\|(J+\varepsilon A_2)v'\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})}$. Для этого мы вновь воспользуемся операторным уравнением (1.1.31). Из его вида следует, что

$$\varepsilon\|v'\|_{L_{4/3}(0,T;V^3)} \leqslant \|f\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} + \|B(v)\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} -$$
$$-\mu_0\|Av\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} + \mu_1\|C(v,z)\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})}.$$

Таким образом,

$$\varepsilon\|A^2v'\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} \leqslant \varepsilon\|v'\|_{L_{4/3}(0,T;V^3)} \leqslant \|f\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} + \|B(v)\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} +$$
$$+\mu_0\|Av\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} + \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\beta)}\|C(v,z)\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})}. \qquad (1.1.36)$$

Итак, из (1.1.33), оценок (1.1.34)–(1.1.36) и априорных оценок (1.1.22) и (1.1.23), получим

$$\|v'\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} \leqslant 2(\|f\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} + \|B(v)\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} + \mu_0\|Av\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} +$$
$$+\frac{\mu_1}{\Gamma(1-\beta)}\|C(v,z)\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})}) \leqslant C_{19}(\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \|v\|_{L_2(0,T;V^1)} +$$
$$+\|v\|^{\frac{1}{2}}_{C([0,T];V^0)}\|v\|^{\frac{3}{2}}_{L_2(0,T;V^1)}) \leqslant C_{20}(\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \|v_0\|_{V^0} + \sqrt{\varepsilon}\|v_0\|_{V^2} +$$
$$+(\|v_0\|_{V^0} + \sqrt{\varepsilon}\|v_0\|_{V^2} + \|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})})^{\frac{1}{2}}(\|v_0\|_{V^0} + \sqrt{\varepsilon}\|v_0\|_{V^2} + \|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}))^{\frac{3}{2}} \leqslant$$
$$\leqslant C_{21}(\|v_0\|_{V^0} + \sqrt{\varepsilon}\|v_0\|_{V^2} + \|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + 1)^2 \leqslant$$
$$\leqslant 4C_{21}(\|v_0\|^2_{V^0} + \varepsilon\|v_0\|^2_{V^2} + \|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} + 1).$$

Что и доказывает неравенство (1.1.29), где $C_{14} = 4C_{21}$.

Наконец, вновь применяя оценки (1.1.34) и (1.1.35), для правой части (1.1.36), а также априорные оценки (1.1.22) и (1.1.23), получим

$$\varepsilon\|v'\|_{L_{4/3}(0,T;V^3)} \leqslant 2(\|f\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} + \|B(v)\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} + \mu_0\|Av\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})}+$$
$$+\frac{\mu_1}{\Gamma(1-\beta)}\|C(v,z)\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})}) \leqslant C_{22}(\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \|v\|_{L_2(0,T;V^1)}+$$
$$+\|v\|^{\frac{1}{2}}_{C([0,T];V^0)}\|v\|^{\frac{3}{2}}_{L_2(0,T;V^1)}) \leqslant C_{23}(\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \|v_0\|_{V^0} + \sqrt{\varepsilon}\|v_0\|_{V^2}+$$
$$+(\|v_0\|_{V^0} + \sqrt{\varepsilon}\|v_0\|_{V^2} + \|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})})^{\frac{1}{2}}(\|v_0\|_{V^0} + \sqrt{\varepsilon}\|v_0\|_{V^2} + \|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})})^{\frac{3}{2}})$$
$$\leqslant C_{24}(\|v_0\|_{V^0} + \sqrt{\varepsilon}\|v_0\|_{V^2} + \|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + 1)^2 \leqslant$$
$$\leqslant 4C_{24}(\|v_0\|^2_{V^0} + \varepsilon\|v_0\|^2_{V^2} + \|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} + 1).$$

Таким образом, установлено неравенство (1.1.30), где $C_{15} = 4C_{24}$. Лемма доказана. □

Лемма 1.1.8. *Пусть $v_0 \in V^3$, $f \in L_2(0,T;V^{-1})$. Тогда для любого $v \in W_2$ операторного уравнения (1.1.12) имеет место оценка:*

$$\|v\|_{W_2} \leqslant C_{25}, \tag{1.1.37}$$

где $C_{25} > 0$ — некоторая постоянная, зависящая от ε.

1.1.5 Разрешимость семейства вспомогательных задач

Теорема 1.1.6. *Пусть $v_0 \in V^3$ и $f \in L_2(0,T;V^{-1})$. Тогда существует по крайней мере одно решение $v \in W_2$ вспомогательной задачи (1.1.7)–(1.1.10) при $\xi = 1$.*

Доказательство. Для доказательства данной теоремы воспользуемся теорией топологической степени уплотняющих векторных полей. Рассмотрим операторное уравнение (1.1.13):

$$L(v) - \xi K(v) + \xi G(v) = \xi(f,a), \quad \text{где} \quad \xi \in [0,1]. \tag{1.1.38}$$

Из леммы 1.1.8 следует, что все решения уравнения (1.1.38) лежат в шаре $B_R \subset W_2$ с центром в нуле и радиусом $R = C_{25} + 1$. По 4) части леммы 1.1.2 оператор $L : W_2 \to L_2(0,T;V^{-1}) \times V^3$ является обратимым. Тогда ни одно решение семейства уравнений

$$v = \xi L^{-1}(K(v) - G(v) + (f,v_0)), \quad \text{где} \quad \xi \in [0,1],$$

не принадлежит границе того же шара B_R.

В силу 4) части леммы 1.1.2 оператор $L^{-1} : L_2(0,T;V^{-1}) \times V^3 \to W_2$ является непрерывным. По леммам 1.1.3 и 1.1.5 отображение $(K(v) - G(v) + (f, v_0)) : W_2 \to L_2(0,T;V^{-1}) \times V^3$ является L-уплотняющим относительно меры некомпактности Куратовского γ_k. Следовательно, оператор $L^{-1}(K(v) - G(v) + (f, v_0)) : W_2 \to W_2$ является уплотняющим относительно меры некомпактности Куратовского γ_k.

Таким образом, векторное поле $v - \xi L^{-1}(K(v) - G(v) + (f, v_0))$ невырождено на границе шара B_R, а значит для этого векторного поля определена топологическая степень $\deg(I - \xi L^{-1}(K - G + f), B_R, 0)$ (см. [18], [56]). По свойствам гомотопической инвариантности и нормировки степени получим, что

$$\deg(I - \xi L(K - G + f), B_R, 0) = \deg(I, B_R, 0) = 1.$$

Отличие от нуля степени отображения обеспечивает существование хотя бы одного решения $v \in W_2$ уравнения (1.1.38) при $\xi = 1$, а следовательно, и вспомогательной задачи (1.1.7)–(1.1.10) при $\xi = 1$. Теорема доказана. $\square$

1.1.6 Доказательство теоремы 1.1.3

Перейдем непосредственно к доказательству разрешимости начально–краевой задачи (1.1.1)–(1.1.5). Для этого осуществим предельный переход во вспомогательной задаче (1.1.7)–(1.1.10) при $\xi = 1$. Поскольку пространство V^3 плотно в V^0, то для каждого $v_0^* \in V^0$ существует последовательность $v_0^m \in V^3$, сходящаяся к v_0^* в V^0. Если $v_0^* \equiv 0$, то положим $v_0^m \equiv 0$, $\varepsilon_m = 1/m$. Если же $\|v_0^*\|_{V^0} \neq 0$, то начиная с некоторого номера $\|v_0^m\|_{V^2} \neq 0$. Тогда положим $\varepsilon_m = 1/(m\|v_0^m\|^2_{V^2})$. В силу нашего выбора полученная последовательность $\{\varepsilon_m\}$ сходится к нулю при $m \to \infty$. Причем $\varepsilon_m \|v_0^m\|^2_{V^2} \leqslant 1$.

По теореме 1.1.6 при каждом ε_m и v_0^m существует решение $v_m \in W_2 \subset W_1$ вспомогательной задачи (1.1.7)–(1.1.10) при $\xi = 1$. Таким образом, каждое решение v_m для всех $\varphi \in V^1$ при почти всех $t \in (0,T)$ удовлетворяет равенству

$$\langle v_m', \varphi \rangle - \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n (\Delta_\alpha^{-1} v_m)_i (v_m)_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx + \mu_0 \int\limits_\Omega \nabla v_m : \nabla \varphi\, dx -$$

$$-\varepsilon_m \int\limits_\Omega \nabla\Delta v_m' : \nabla\varphi\, dx + \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\beta)}\Big(\int\limits_0^t (t-s)^{-\beta}\mathcal{E}(v_m)(s, z_m(s;t,x))\, ds, \mathcal{E}(\varphi)\Big) =$$
$$= \langle f, \varphi\rangle, \tag{1.1.39}$$

и начальному условию

$$v_m|_{t=0} = v_0^m.$$

Так как последовательность $\{v_0^m\}$ сходится в V^0, то она ограничена по норме V^0. Следовательно,

$$\|v_0^m\|^2_{V^0} + \varepsilon_m\|v_0^m\|^2_{V^2} \leqslant C_{26}.$$

Таким образом, из оценок (1.1.22), (1.1.23), (1.1.29) и (1.1.30) получаем, что

$$\|v_m\|^2_{L_2(0,T;V^1)} \leqslant C_{27}(\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} + 1), \tag{1.1.40}$$
$$\|v_m\|^2_{C([0,T];V^0)} \leqslant C_{28}(\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} + 1), \tag{1.1.41}$$
$$\|v_m'\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} \leqslant C_{29}(\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} + 1), \tag{1.1.42}$$
$$\varepsilon\|v_m'\|_{L_{4/3}(0,T;V^3)} \leqslant C_{30}(\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} + 1), \tag{1.1.43}$$

где константы $C_{27} - C_{30}$ не зависят от ε. В силу непрерывности вложения $C([0,T];V^0) \subset L_\infty(0,T;V^0)$ и оценок (1.1.40)–(1.1.42), без ограничения общности (если необходимо переходя к подпоследовательности) получим, что

$$v_m \to v_* \quad \text{слабо в} \quad L_2(0,T;V^1) \quad \text{при} \quad m\to\infty,$$
$$v_m \to v_* \quad \text{*-слабо в} \quad L_\infty(0,T;V^0) \quad \text{при} \quad m\to\infty,$$
$$v_m' \to v_*' \quad \text{слабо в} \quad L_{4/3}(0,T;V^{-1}) \quad \text{при} \quad m\to\infty,$$

и что предельная функция v_* принадлежит пространству W_1.

Рассмотрим задачу Коши (1.1.3) для предельной функции v_*. Так как $v_* \in W_1$, следовательно v_* удовлетворяет условиям теоремы 1.1.1. Поэтому в $[0,T]\times[0,T]\times\overline{\Omega}$ существует РЛП $z_*(\tau;t,x)$, порожденный v_*. Обозначим через $z_m(\tau;t,x)$ – РЛП, порожденные v_m.

Лемма 1.1.9. *Последовательность $z_m(\tau;t,x)$ сходится по мере Лебега на $[0,T]\times\Omega$ по (τ,x) к $z(\tau;t,x)$ для $t\in[0,T]$.*

Данная лемма следует из априорной оценки (1.1.37) и теоремы 1.1.2.

Доказательства разрешимости начально–краевой задачи (1.1.1)–(1.1.5) разделим на две части. Сначала докажем предельный переход во вспомогательной задаче (1.1.7)–(1.1.10) при $\xi = 1$ с гладкой пробной функцией φ из V^1, затем для производной функции $\varphi \in V^1$.

I часть. Пусть пробной функцией φ из V^1 – гладкая. Перейдем к пределу в каждом слагаемом (1.1.39).

При $m \to \infty$ по определению слабой сходимости $v_m \to v^*$ в $L_2(0,T;V^1)$ получим

$$\mu_0 \int\limits_\Omega \nabla v_m : \nabla \varphi \, dx \to \mu_0 \int\limits_\Omega \nabla v_* : \nabla \varphi \, dx$$

для любого $\varphi \in V^1$.

В силу слабой сходимости $v_m' \to v_*'$ в $L_{4/3}(0,T;V^{-1})$ при $m \to \infty$ получим, что

$$\langle v_m', \varphi \rangle \to \langle v_*', \varphi \rangle$$

для любого $\varphi \in V^1$.

Далее, используя оценку (1.1.43), без ограничения общности и в случае необходимости переходя к подпоследовательности, мы имеем, что существует функция $u \in L_{4/3}(0,T;V^3)$ такая, что

$$\varepsilon_m v_m' \to u \quad \text{слабо в} \quad L_{4/3}(0,T;V^3) \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Тогда

$$\varepsilon_m \langle \nabla \Delta v_m', \nabla \varphi \rangle \to \langle \nabla \Delta u, \nabla \varphi \rangle, \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Однако последовательность $\varepsilon_m v_m'$ сходится к нулю в смысле распределений на отрезке $[0,T]$ со значениями в V^{-3}. Действительно для любой гладкой скалярной функции ψ с компактным носителем и $\varphi \in V^3$, мы получим

$$\lim_{m\to\infty} \left| \varepsilon_m \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \nabla \Delta v_m' : \nabla \varphi \, dx \psi(t) \, dt \right| = \lim_{m\to\infty} \varepsilon_m \left| \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \Delta v_m' \Delta \varphi \, dx \psi(t) \, dt \right| =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \varepsilon_m \left| \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \nabla v_m' : \nabla \Delta \varphi \, dx \psi(t) \, dt \right| =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \varepsilon_m \lim_{m\to\infty} \left| \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \nabla v'_m : \nabla\Delta\varphi \, dx \psi(t) \, dt \right| =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \varepsilon_m \lim_{m\to\infty} \left| \int\limits_\Omega \left(\int\limits_0^T \nabla v'_m \psi(t) \, dt \right) : \nabla\Delta\varphi \, dx \right| =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \varepsilon_m \lim_{m\to\infty} \left| \int\limits_\Omega \left(\int\limits_0^T \nabla v_m \frac{\partial\psi(t)}{\partial t} \, dt \right) : \nabla\Delta\varphi \, dx \right| =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \varepsilon_m \lim_{m\to\infty} \left| \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \nabla v_m : \nabla\Delta\varphi \, dx \frac{\partial\psi(t)}{\partial t} \, dt \right|.$$

Так как v_m слабо сходится к v^* в $L_2(0,T;V^1)$ и, следовательно, сходится к v^* в смысле распределений, то

$$\lim_{m\to\infty} \varepsilon_m \lim_{m\to\infty} \left| \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \nabla v_m : \nabla\Delta\varphi \, dx \psi(t) \, dt \right| =$$

$$= \left| \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \nabla v_* : \nabla\Delta\varphi \, dx \frac{\partial\psi(t)}{\partial t} \, dt \right| \lim_{m\to\infty} \varepsilon_m = 0.$$

Таким образом, в силу единственности слабого предела

$$\varepsilon_m \langle \nabla\Delta v'_m, \nabla\varphi \rangle \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Так как вложение $V^1 \subset L_4(\Omega)$ является вполне непрерывным, а вложение $L_4(\Omega) \subset V^{-1}$ — непрерывно, то по теореме 1.1.5 следует, что

$$F = \{ v \in L_2(0,T;V^1), v' \in L_{4/3}(0,T;V^{-1}) \} \subset L_2(0,T;L_4(\Omega)).$$

Тогда, учитывая оценки (1.1.41) и (1.1.42) заключаем, что

$$v_m \to v_* \quad \text{сильно в} \quad L_2(0,T;L_4(\Omega)).$$

В силу того, что оператор $\Delta_\alpha^{-1} = (I - \alpha^2\Delta)^{-1} : L_2(0,T;V^1) \to L_2(0,T;V^3)$ является непрерывным, то

$$\int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n (\Delta_\alpha^{-1} v_m)_i (v_m)_j \frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i} \, dx \to \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n (\Delta_\alpha^{-1} v_*)_i (v_*)_j \frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i} \, dx \quad \text{при} \quad m \to \infty,$$

где первая последовательность $(\Delta_\alpha^{-1} v_m)_i$ слабо сходится в $L_2(0,T;V^1)$, а вторая $(v_m)_j$ — сильно в $L_2(0,T;L_4(\Omega))$. Следовательно, их произведение сходится слабо к произведению пределов.

Теперь покажем, что

$$\frac{\mu_1}{\Gamma(1-\beta)}\Big(\int\limits_0^t (t-s)^{-\beta}\mathcal{E}(v_m)(s,\ z_m(s;t,x))\,ds, \mathcal{E}(\varphi)\Big) \to$$

$$\to \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\beta)}\Big(\int\limits_0^t (t-s)^{-\beta}\mathcal{E}(v_*)(s, z_*(s;t,x))\,ds, \mathcal{E}(\varphi)\Big). \qquad (1.1.44)$$

Рассмотрим разность

$$\frac{\mu_1}{\Gamma(1-\beta)}\Big(\int\limits_0^t (t-s)^{-\beta}\mathcal{E}(v_m)(s,\ z_m(s;t,x))\,ds, \mathcal{E}(\varphi)\Big) -$$

$$\frac{\mu_1}{\Gamma(1-\beta)}\Big(\int\limits_0^t (t-s)^{-\beta}\mathcal{E}(v_*)(s, z_*(s;t,x))\,ds, \mathcal{E}(\varphi)\Big) =$$

$$= \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\beta)}\Big(\int\limits_0^t (t-s)^{-\beta}\int\limits_\Omega \Big[\mathcal{E}(v_m)(s,\ z_m(s;t,x)) -$$

$$-\mathcal{E}(v_*)(s,\ z_m(s;t,x))\Big] : \mathcal{E}(\varphi)\,dx\,ds\Big) +$$

$$+\frac{\mu_1}{\Gamma(1-\beta)}\Big(\int\limits_0^t (t-s)^{-\beta}\int\limits_\Omega \Big[\mathcal{E}(v_*)(s,\ z_m(s;t,x)) -$$

$$-\mathcal{E}(v_*)(s, z_*(s;t,x))\Big] : \mathcal{E}(\varphi)\,dx\,ds\Big) = Z_1^m + Z_2^m.$$

1) Покажем сначала, что $Z_1^m \to 0$ при $m \to \infty$.

Обозначим интеграл по области Ω в Z_1^m через I:

$$I = \int\limits_\Omega \Big[\mathcal{E}(v_m)(s,\ z_m(s;t,x)) - \mathcal{E}(v_*)(s,\ z_m(s;t,x))\Big] : \mathcal{E}(\varphi)\,dx.$$

Сделаем в I замену переменных $x = z^m(t;s,y)$ (где обратная замена $y = z_m(s;t,x)$):

$$I = \int\limits_\Omega \Big[\mathcal{E}(v_m)(s,y) - \mathcal{E}(v_*)(s,y)\Big] : \mathcal{E}(\varphi)(z_m(t;s,y))\,dy.$$

Перепишем Z_1^m и продолжим дальнейшее разложение:

$$Z_1^m = \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\beta)}\Big(\int\limits_0^t (t-s)^{-\beta}\int\limits_\Omega \Big[\mathcal{E}(v_m)(s,y)-$$

$$-\mathcal{E}(v_*)(s,y)\Big] : \mathcal{E}(\varphi)(z_m(t;s,y))\,dy\,ds\Big) =$$

$$= \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\beta)}\Big(\int\limits_0^t (t-s)^{-\beta}\int\limits_\Omega \Big[\mathcal{E}(v_m)(s,y)-\mathcal{E}(v_*)(s,y)\Big] : \Big[\mathcal{E}(\varphi)(z_m(t;s,y))-$$

$$-\mathcal{E}(\varphi)(z_*(t;s,y))\Big]\,dy\,ds\Big) + \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\beta)}\Big(\int\limits_0^t (t-s)^{-\beta}\int\limits_\Omega \Big[\mathcal{E}(v_m)(s,y)-$$

$$-\mathcal{E}(v_*)(s,y)\Big] : \mathcal{E}(\varphi)(z_*(t;s,y))\,dy\,ds\Big) = Z_{11}^m + Z_{12}^m.$$

a) Получаем, что $Z_{12}^m \to 0$ при $m\to\infty$ в силу слабой сходимости v_m к v_* в пространстве $L_2(0,T;V^1)$.

b) Применяя неравенства Гельдера и Коши-Буняковского, получим

$$|Z_{11}^m|^2 \leqslant C_{31}\Big(\int\limits_0^t (t-s)^{-\beta}\|v_m(s,\cdot)-v_*(s,\cdot)\|_{V^1}\|\varphi_x(z_m(t;s,\cdot))-$$

$$-\varphi_x(z_*(t;s,\cdot))\|_{V^0}\,ds\Big)^2 \leqslant C_{32}\|v_m(s,\cdot)-v_*(s,\cdot)\|_{L_2(0,T;V^1)}\times$$

$$\times\int_0^T \|\varphi_x(z_m(t;s,\cdot))-\varphi_x(z_*(t;s,\cdot))\|_{V^0}\,ds. \qquad (1.1.45)$$

Обозначим второй сомножитель в последнем неравенстве через $\Phi_m(s)$:

$$\Phi_m(s) = \int\limits_0^T \|\varphi_x(z_m(t;s,\cdot))-\varphi_x(z_*(t;s,\cdot))\|_{V^0}\,ds.$$

Покажем сходимость $\Phi_m(s)\to 0$ при $m\to\infty$ для всех $s\in[0,T]$. Заметим, что

$$\Phi_m(s) = \int\limits_0^T\int\limits_\Omega |\varphi_x(z_m(t;s,y))-\varphi_x(z_*(t;s,y))|^2\,dy\,ds.$$

Пусть $\varepsilon>0$ – достаточно малое число. Непрерывность функции φ_x в $\overline{\Omega}$ означает, что существует $\delta(\varepsilon)$ такое, что если $|x''-x'|\leqslant\delta(\varepsilon)$, то

$$|\varphi_x(x'')-\varphi_x(x')|\leqslant\varepsilon. \qquad (1.1.46)$$

Так как последовательность $z_m(t;s,y)$ сходится к $z_*(t;s,y)$ по мере Лебега по (t,y), следовательно для $\delta(\varepsilon)$ существует такое число $N=N(\delta(\varepsilon))$, что для $m\geqslant N$ выполнено следующее неравенство

$$m(\{(t,y):\ |z_m(t;s,y)-z_*(t;s,y)|\geqslant\delta(\varepsilon)\})\leqslant\varepsilon. \tag{1.1.47}$$

Обозначим

$$Q(>\delta(\varepsilon))=\{(t,y)\in Q_T:\ |z_m(t;s,y)-z_*(t;s,y)|>\delta(\varepsilon)\};$$

$$Q(\leqslant\delta(\varepsilon))=\{(t,y)\in Q_T:\ |z_m(t;s,y)-z_*(t;s,y)|\leqslant\delta(\varepsilon)\}.$$

Тогда

$$\Phi_m(s)\leqslant C_{33}\Big(\int\limits_{Q(>\delta(\varepsilon))}|\varphi_x(z_m(t;s,y))-\varphi_x(z_*(t;s,y))|^2\,dy\,ds+$$

$$\int\limits_{Q(\leqslant\delta(\varepsilon))}|\varphi_x(z_m(t;s,y))-\varphi_x(z_*(t;s,y))|^2\,dy\,ds\Big)=C_{33}\Big(\Phi_m^1(s)+\Phi_m^2(s)\Big). \tag{1.1.48}$$

Для $\Phi_m^2(s)$ в силу (1.1.46) имеем $|z_m(t;s,y)-z_*(t;s,y)|\leqslant\delta(\varepsilon)$. Следовательно

$$\Phi_m^2(s)\leqslant\int\limits_{Q(\leqslant\delta(\varepsilon))}\varepsilon^2\,dy\,ds=C_{34}\varepsilon^2. \tag{1.1.49}$$

Для $\Phi_m^1(s)$ в силу (1.1.47) имеем $m(Q(>\delta(\varepsilon)))\leqslant\varepsilon$. Следовательно

$$\Phi_m^1(s)\leqslant C_{35}\|\varphi_x\|_{C(\Omega)}\int\limits_{Q(>\delta(\varepsilon))}dy\,ds=C_{35}\varepsilon\|\varphi_x\|_{C(\Omega)}. \tag{1.1.50}$$

Таким образом, из (1.1.48), (1.1.49) и (1.1.50) следует, что для малого $\varepsilon>0$ и $m\geqslant N(\delta(\varepsilon))$ выполнено неравенство

$$\Phi_m(s)\leqslant C_{36}\varepsilon.$$

Следовательно, получена сходимость $\Phi_m(s)\to 0$ при $m\to\infty$ для всех $s\in[0,T]$. Рассмотрим правую часть неравенства (1.1.45). В силу ограниченности первого сомножителя (т.к. $v_m\in L_2(0,T;V^1)$) и сходимости к 0 второго сомножителя при $m\to\infty$, получаем, что $Z_{11}^m\to 0$ при $m\to\infty$.

Таким образом, доказано, что $Z_1^m \to 0$ при $m \to \infty$.

2) Теперь покажем, что $Z_2^m \to 0$ при $m \to \infty$. Рассмотрим вспомогательную гладкую и конечную на $[0,T] \times \Omega$ функцию $\widetilde{v}(t,x)$ такую, что $\|v_* - \widetilde{v}\|_{L_2(0,T;V^1)} \leqslant \varepsilon$ для достаточно малого $\varepsilon > 0$. Оценим теперь Z_2^m через три интеграла

$$|Z_2^m| \leqslant C_{37}\Big(\int\limits_0^t (t-s)^{-\beta} \int\limits_\Omega \|v_*(s,\, z_m(s;t,x)) - \widetilde{v}(s, z_m(s;t,x))\|_{V^1}\, ds +$$
$$+ \int\limits_0^t (t-s)^{-\beta} \int\limits_\Omega \|\widetilde{v}(s,\, z_m(s;t,x)) - \widetilde{v}(s, z_*(s;t,x))\|_{V^1}\, ds +$$
$$+ \int\limits_0^t (t-s)^{-\beta} \int\limits_\Omega \|\widetilde{v}(s,\, z_*(s;t,x)) - v_*(s, z_*(s;t,x))\|_{V^1}\, ds\Big) =$$
$$= C_{37}\big(Z_{21}^m + Z_{22}^m + Z_{23}^m\big).$$

Сделаем замену переменных в нормах под интегралами Z_{21}^m и Z_{23}^m:

$$\|v_*(s,\, z_m(s;t,x)) - \widetilde{v}(s, z_m(s;t,x))\|_{V^1} = \|v_*(s,y) - \widetilde{v}(s,y)\|_{V^1};$$

$$\|\widetilde{v}(s,\, z_*(s;t,x)) - v_*(s, z_*(s;t,x))\|_{V^1} = \|\widetilde{v}(s,y) - v_*(s,y)\|_{V^1}.$$

Тогда получим

$$Z_{21}^m + Z_{23}^m = C_{37}(\int\limits_0^t (t-s)^{-\beta} \|v_*(s,\cdot) - \widetilde{v}(s,\cdot)\|_{V^1}\, ds) \leqslant C_{37}\varepsilon.$$

Оценим также Z_{22}^m

$$Z_{22}^m \leqslant C_{37}(\int\limits_0^t (t-s)^{-\beta}\Big(\int\limits_\Omega |\widetilde{v}_x(s,\, z_m(s;t,\cdot)) - \widetilde{v}_x(s, z_*(s;t,\cdot))|^2\, dx\Big)^{1/2} ds).$$

В силу леммы 1.1.9 $z_m(s;t,x)$ сходится к $z(s;t,x)$ и функция $\widetilde{v}_x(t,x)$ – ограниченная и гладкая, поэтому по теореме Лебега получим сходимость $Z_2^m \to 0$ при $m \to \infty$. Таким образом, доказали сходимость (1.1.44).

В итоге показали, что функция v_* при гладкой пробной функции φ из V^1 удовлетворяет равенству:

$$\langle v_*', \varphi\rangle - \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n (\Delta_\alpha^{-1} v_*)_i (v_*)_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\,dx + \mu_0 \int\limits_\Omega \nabla v_* : \nabla \varphi\,dx +$$

$$+\frac{\mu_1}{\Gamma(1-\beta)}\Big(\int\limits_0^t (t-s)^{-\beta}\mathcal{E}(v_*)(s, z_*(s;t,x))\,ds, \mathcal{E}(\varphi)\Big) = \langle f, \varphi\rangle. \tag{1.1.51}$$

Так как для последовательности $\{v_m\}$ имеют место априорные оценки (1.1.40), (1.1.41) и (1.1.42), то в силу свойств слабой сходимости для v_* непосредственно получаем оценку:

$$\|v_*\|_{L_\infty(0,T;V^0)} + \|v_*\|_{L_2(0,T;V^1)} + \|v_*\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} \leqslant C_{38}(\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + 1).$$

Откуда следует, что $v_* \in W_1$. Таким образом, доказали предельный переход при гладкой пробной функции φ из V^1.

II часть. Докажем данный предельный переход для произвольной пробной функции φ из V^1. Перепишем (1.1.51) для гладкой φ в виде:

$$[G_1, \varphi] - [G_2, \varphi] = 0, \tag{1.1.52}$$

где

$$[G_1, \varphi] = \langle v', \varphi\rangle - \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n (\Delta_\alpha^{-1} v)_i (v)_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\,dx + \mu_0 \int\limits_\Omega \nabla v : \nabla \varphi\,dx +$$

$$+\frac{\mu_1}{\Gamma(1-\beta)}\Big(\int\limits_0^t (t-s)^{-\beta}\mathcal{E}(v)(s, z(s;t,x))\,ds, \mathcal{E}(\varphi)\Big);$$

$$[G_2, \varphi] = \langle f, \varphi\rangle.$$

Лемма 1.1.10. *Пусть пробная функция φ – гладкая. Тогда*

$$|[G_1, \varphi]| \leqslant C_{39}\|\varphi\|_{V^1}, \quad |[G_2, \varphi]| \leqslant C_{40}\|\varphi\|_{V^1}. \tag{1.1.53}$$

Доказательство данной леммы аналогично получению априорных оценок в параграфе 3.

Так как множество гладких функций плотно в V^1, для $\varphi \in V^1$ существует последовательность гладких функций $\varphi^l \in V^1$ таких, что $|\varphi^l - \varphi|_{V^1} \to 0$ при $l \to \infty$. В силу (1.1.52) получим

$$[G_1, \varphi] - [G_2, \varphi] = [G_1, \varphi - \varphi^l] - [G_2, \varphi - \varphi^l] + [G_1, \varphi^l] - [G_2, \varphi^l] = \\ = [G_1, \varphi - \varphi^l] - [G_2, \varphi - \varphi^l].$$

Из последнего равенства и оценок (1.1.53) получим

$$|[G_1, \varphi] - [G_2, \varphi]| \leqslant C_{41}|\varphi - \varphi^l|.$$

Принимая во внимание последнее неравенство и переходя к пределу при $l \to \infty$ в равенстве (1.1.51) для $\varphi = \varphi^l$ получим равенство (1.1.51) для произвольной $\varphi \in V^1$, что и завершает доказательство существования слабых решений начально–краевой задачи (1.1.1)–(1.1.5).

1.1.7 Доказательство теоремы 1.1.4

В данном параграфе установим сходимость решений альфа–модели (1.1.1)–(1.1.5) к решениям исходной модели

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \mu_0 \Delta v -$$

$$- \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\beta)} \mathrm{Div} \int_0^t (t-s)^{-\beta} \mathcal{E}(v)\big(s, z(s;t,x)\big)\, ds + \nabla p = f, \tag{1.1.54}$$

$$z(\tau;t,x) = x + \int_t^\tau v\big(s, z(s;t,x)\big)\, ds, \quad t, \tau \in [0,T], \quad x \in \Omega, \tag{1.1.55}$$

$$\operatorname{div} v(t,x) = 0, \quad t \in [0,T], \quad x \in \Omega, \tag{1.1.56}$$

$$v|_{t=0} = v_0; \qquad v|_{\partial\Omega} = 0. \tag{1.1.57}$$

Прежде чем переходить непосредственно к доказательству сформулируем определение слабого решения начально–краевой задачи (1.1.54)–(1.1.57).

Определение 1.1.6. *Пусть $f \in L_2(0,T;V^{-1})$, $v_0 \in V^0$. Функция $v \in W_1$ называется слабым решением начально–краевой задачи (1.1.54)–(1.1.57), если* *для всех $\varphi \in V^1$ при почти всех $t \in (0,T)$ она удовлетворяет равенству*

$$\langle v', \varphi\rangle - \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx + \mu_0 \int\limits_\Omega \nabla v : \nabla \varphi\, dx +$$

$$+\frac{\mu_1}{\Gamma(1-\beta)}\Big(\int\limits_0^t (t-s)^{-\beta}\mathcal{E}(v)(s, z(v)(s;t,x))\, ds, \mathcal{E}(\varphi)\Big) = \langle f, \varphi\rangle, \qquad (1.1.58)$$

и начальному условию (1.1.57). Здесь $z(v)$ — РЛП, порожденный v.

Рассмотрим последовательность чисел α_m, таких что $\alpha_m \to 0$ при $m \to \infty$, и еще одно семейство вспомогательных задач, зависящих от параметра α_m:

$$\frac{\partial v^m}{\partial t} + \sum_{i=1}^n u_i^m \frac{\partial v^m}{\partial x_i} - \mu_0 \Delta v^m -$$

$$-\frac{\mu_1}{\Gamma(1-\beta)}\mathrm{Div} \int\limits_0^t (t-s)^{-\beta}\mathcal{E}(v^m)(s, z^m(s;t,x))\, ds = f, \qquad (1.1.59)$$

$$z^m(\tau;t,x) = x + \int\limits_t^\tau v^m(s, z^m(s;t,x))\, ds, \qquad (1.1.60)$$

$$u^m = (I - \alpha_m^2\Delta)^{-1} v^m, \qquad (1.1.61)$$

$$\mathrm{div}\, v^m = 0, \quad v^m|_{t=0} = v_0, \quad v^m|_{\partial\Omega} = 0. \qquad (1.1.62)$$

По доказанной теореме 1.1.3 при каждом α_m существует решение $v^m \in W_1$ вспомогательной задачи (1.1.59)–(1.1.62). Тогда для всех $\varphi \in V^2$ при почти всех $t \in (0,T)$ имеет место равенство

$$\langle (v^m)', \varphi\rangle - \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n (\Delta_\alpha^{-1} v^m)_i v_j^m \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx + \mu_0 \int\limits_\Omega \nabla v^m : \nabla \varphi\, dx +$$

$$+\frac{\mu_1}{\Gamma(1-\beta)}\Big(\int\limits_0^t (t-s)^{-\beta}\mathcal{E}(v^m)(s, z(v^m)(s;t,x))\, ds, \mathcal{E}(\varphi)\Big) = \langle f, \varphi\rangle, \qquad (1.1.63)$$

Из оценок (1.1.40)–(1.1.42) следует, что

$$v^m \to v^* \quad \text{слабо в} \quad L_2(0,T;V^1) \quad \text{при} \quad m \to \infty,$$
$$v^m \to v^* \quad {}^*\text{-слабо в} \quad L_\infty(0,T;V^0) \quad \text{при} \quad m \to \infty,$$
$$(v^m)' \to (v^*)' \quad \text{слабо в} \quad L_{4/3}(0,T;V^{-1}) \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Используя эти сходимости, перейдем к пределу в равенстве (1.1.63). Рассмотрим отдельно второе слагаемое.

$$|\langle B(v^m),\varphi\rangle - \langle B(v_*),\varphi\rangle| = \Big|\int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n u_i^m v_j^m \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\,dx - \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i^* v_j^* \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\,dx\Big| =$$

$$= \Big|\int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n \Big((u_i^m - v_i^m)v_j^m + (v_i^m - v_i^*)v_j^m + (v_j^m - v_j^*)v_i^*\Big)\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\,dx\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \Big|\int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n (u_i^m - u_i^m + \alpha_m^2\Delta u_i^m)v_j^m \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\,dx\Big| + \Big|\int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n (v_i^m - v_i^*)v_j^m \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\,dx\Big| +$$

$$+ \Big|\int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n (v_j^m - v_j^*)v_i^* \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\,dx\Big|.$$

Отдельно оценим каждое слагаемое. В первом слагаемом, используя неравенство Гельдера, а также непрерывность вложения $V^1 \subset L_4(\Omega)$, для всех $\varphi \in V^2$ получим

$$\Big|\int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n \alpha_m^2 \Delta u_i^m v_j^m \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\,dx\Big| \leqslant \alpha_m \sum_{i,j=1}^n \Big(\int\limits_\Omega |\alpha_m \Delta u_i^m|^2\,dx\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int\limits_\Omega \Big|v_j^m \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\Big|^2\,dx\Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \alpha_m \sum_{i,j=1}^n \|\alpha_m \Delta u_i^m\|_{L_2(\Omega)} \|v_j^m\|_{L_4(\Omega)} \Big\|\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\Big\|_{L_4(\Omega)} \leqslant$$

$$\leqslant C_{42}\alpha_m \sum_{i,j=1}^n \|\alpha_m \Delta u_i^m\|_{L_2(\Omega)} \|v_j^m\|_{V^1} \Big\|\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\Big\|_{V^1} \leqslant$$

$$\leqslant C_{43}\alpha_m \|\alpha_m \Delta u^m\|_{L_2(\Omega)} \|v^m\|_{V^1} \|\varphi\|_{V^2}.$$

Остальные слагаемые оцениваются аналогичным образом. Таким образом,

$$|\langle B(v^m),\varphi\rangle - \langle B(v_*),\varphi\rangle| \leqslant C_{44}(\alpha_m \|\alpha_m \Delta u^m\|_{L_2(\Omega)} \|v^m\|_{V^1} \|\varphi\|_{V^2} +$$

$$+ \|v^m - v^*\|_{L_4(\Omega)} \|v^m\|_{L_4(\Omega)} \|\varphi\|_{V^1} + \|v^m - v^*\|_{L_4(\Omega)} \|v^*\|_{L_4(\Omega)} \|\varphi\|_{V^1}) \leqslant$$

$$\leqslant C_{45}(\alpha_m \|\alpha_m \Delta u^m\|_{L_2(\Omega)} \|v^m\|_{V^1} + \|v^m - v^*\|_{L_4(\Omega)} \|v^m\|_{V^1} +$$

$$+ \|v^m - v^*\|_{L_4(\Omega)} \|v^*\|_{V^1}) \|\varphi\|_{V^2}.$$

Следовательно,

$$\|B(v^m) - B(v_*)\|_{V^{-2}} \leqslant C_{45}(\alpha_m \|\alpha_m \Delta u^m\|_{L_2(\Omega)} \|v^m\|_{V^1} +$$

$$+ \|v^m - v^*\|_{L_4(\Omega)} \|v^m\|_{V^1} + \|v^m - v^*\|_{L_4(\Omega)} \|v^*\|_{V^1}).$$

Проинтегрируем обе части последнего неравенства по t в пределах от 0 до T. Применяя неравенство Гельдера, заключаем, что

$$\int\limits_0^T \|B(v^m)-B(v_*)\|_{V^{-2}}\,dt \leqslant \alpha_m C_{45}\int\limits_0^T \|\alpha_m\Delta u^m\|_{L_2(\Omega)}\|v^m\|_{V^1}\,dt+$$

$$+C_{45}\int\limits_0^T \|v^m-v^*\|_{L_4(\Omega)}\|v^m\|_{V^1}\,dt+C_{45}\int\limits_0^T \|v^m-v^*\|_{L_4(\Omega)}\|v^*\|_{V^1}\,dt\leqslant$$

$$\leqslant \alpha_m C_{45}\Big(\int\limits_0^T \|\alpha_m\Delta u^m\|^2_{L_2(\Omega)}\,dt\Big)^{\frac12}\Big(\int\limits_0^T \|v^m\|_{V^1}\,dt\Big)^{\frac12}+$$

$$+C_{45}\|v^m-v^*\|_{L_2(0,T;L_4(\Omega))}\|v^m\|_{L_2(0,T;V^1)}+$$

$$+C_{45}\|v^m-v^*\|_{L_2(0,T;L_4(\Omega))}\|v^*\|_{L_2(0,T;V^1)}. \qquad (1.1.64)$$

Так как $v^m\to v^*$ слабо в $L_2(0,T;V^1)$ и $(v^m)'\to(v^*)'$ слабо в $L_{4/3}(0,T;V^{-1})$, то в силу теорема Обена–Симона $v^m\to v^*$ сильно в $L_2(0,T;L_4(\Omega))$. Таким образом, с учетом оценки (1.1.40) получаем, что последние два слагаемых в неравенстве (1.1.64) стремятся к нулю. Напомним, что

$$\|v\|^2_{V^1}=\|u-\alpha^2\Delta u\|^2_{V^1}=\|u\|^2_{V^1}+2\|\alpha\Delta u\|^2_{L_2(\Omega)}+\alpha^4\|u\|^2_{V^3}.$$

Поэтому в силу оценки (1.1.40) следует, что

$$\int\limits_0^T \|\alpha\Delta u\|^2_{L_2(\Omega)}\,dt\leqslant\frac12\int\limits_0^T\|v\|^2_{V^1}\,dt\leqslant C_{27}(\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})}+1). \qquad (1.1.65)$$

Таким образом, в силу неравенств (1.1.64) и (1.1.65), а также указанных сходимостей, получим

$$\int\limits_0^T \|B(v^m)-B(v_*)\|_{V^{-2}}\,dt\leqslant \alpha_m C_{45}C_{27}(\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})}+1)\to 0$$

при $\alpha_m\to 0$. Следовательно, $B(v^m)\to B(v^*)$ сильно в $L_1(0,T;V^{-2})$, а значит и в пространстве $\mathcal{D}'(0,T;V^{-2})$.

Для установления сходимостей в остальных слагаемых равенства (1.1.63) мы полностью повторим рассуждения, которые были проведены при доказательстве предельного перехода в предыдущем параграфе. Все эти слагаемые сходятся в пространстве $L_{4/3}(0,T;V^{-1})$, а значит и в пространстве $\mathcal{D}'(0,T;V^{-2})$.

Таким образом, переходя в равенстве (1.1.63) к пределу при $m \to \infty$ получим, что предельная функция v_* удовлетворяет равенству

$$\langle (v^*)', \varphi \rangle - \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i^* v_j^* \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx + \mu_0 \int\limits_\Omega \nabla v^* : \nabla \varphi \, dx +$$

$$+ \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\beta)} \Big(\int\limits_0^t (t-s)^{-\beta} \mathcal{E}(v^*)(s, Z(v^*)(s;t,x))\, ds, \mathcal{E}(\varphi) \Big) = \langle f, \varphi \rangle.$$

Следовательно, v^* согласно определению 1.1.6 является слабым решением начально – краевой задачи (1.1.54)–(1.1.57) для пробной функции $\varphi \in V^2$. Однако, заметим, что функция v^* в силу полученных сходимостей удовлетворяет оценкам (1.1.40)–(1.1.42). Следовательно каждое слагаемое последнего равенство выполнено и для произвольной пробной функции $\varphi \in V^1$. Таким образом, доказана сходимость слабых решений альфа–модели (1.1.54)–(1.1.57) к слабым решениям начально–краевой задачи (1.1.54)–(1.1.57).

1.2 Альфа–модель движения растворов полимеров

В данном параграфе рассматривается альфа–модель с реологическим соотношением, удовлетворяющим принципу объективности. А именно, реологическое соотношение (3) со сглаженной объективной производной Яуманна (6). В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, на отрезке времени $[0, T]$, $T > 0$, рассматривается следующая начально–краевая задача:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \nu \Delta v - \varkappa \frac{\partial \Delta v}{\partial t} - 2\varkappa \mathrm{Div}\Big(\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial \mathcal{E}(v)}{\partial x_i} \Big) -$$

$$- 2\varkappa \mathrm{Div}\big(\mathcal{E}(v) W_\rho(v) - W_\rho(v)\mathcal{E}(v)\big) + \mathrm{grad}\, p = f; \quad (1.2.1)$$

$$u = (I - \alpha^2 \Delta)^{-1} v, \quad t \in [0, T], \quad x \in \Omega, \quad (1.2.2)$$

$$\mathrm{div}\, v = 0, \quad (t, x) \in (0, T) \times \Omega; \quad (1.2.3)$$

$$v(x, 0) = v_0(x), \quad x \in \Omega; \quad v|_{\partial\Omega \times [0,T]} = 0. \quad (1.2.4)$$

В данном параграфе на основе аппроксимационно–топологического подхода к проблемам математической гидродинамики доказывается слабая разрешимость начально–краевой задачи (1.2.1)–(1.2.4). Для доказательства вводятся вспомогательные задачи и рассматривается их разрешимость. Для этого переходят к операторной трактовке, изучают свойства операторов, получают априорные оценки и применяют теорию топологической степени Лере–Шаудера. На заключительном этапе доказывается, что из последовательности их решений существует подпоследовательность сходящая к решению исходной начально–краевой задачи. Сначала сформулируем понятие слабого решения для рассматриваемой задачи и основной результат данного параграфа.

1.2.1 Постановка задачи

Введём пространства, в которых будет доказана разрешимость изучаемой задачи и задачи, аппроксимирующей исходную:

1. $E_1 = \{v : v \in L_\infty(0, T; V^1),\ v' \in L_2(0, T; V^{-1})\}$,
   с нормой: $\|v\|_{E_1} = \|v\|_{L_\infty(0,T;V^1)} + \|v'\|_{L_2(0,T;V^{-1})}$,
2. $E_2 = \{v : v \in C([0, T], V^3),\ v' \in L_2(0, T; V^3)\}$,
   с нормой: $\|v\|_{E_2} = \|v\|_{C([0,T],V^3)} + \|v'\|_{L_2(0,T;V^3)}$.

Будем предполагать, что $f \in L_2(0,T;V^{-1})$, $v_0 \in V^1$.

Определение 1.2.1. *Слабым решением начально–краевой задачи* (1.2.1)–(1.2.4) *называется функция* $v \in E_1$, *удовлетворяющая для любого* $\varphi \in V^3$ *и почти всех* $t \in (0,T)$ *равенству*

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} v\varphi\,dx - \int\limits_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{n}(\Delta_{\alpha}^{-1}v)_i v_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx + \nu\int\limits_{\Omega}\nabla v:\nabla\varphi\,dx + \varkappa\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega}\nabla v:\nabla\varphi\,dx -$$
$$-\varkappa\int\limits_{\Omega}\sum_{i,j,k=1}^{n} v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i\partial x_k}\,dx - \varkappa\int\limits_{\Omega}\sum_{i,j,k=1}^{n} v_k\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i\partial x_k}\,dx +$$
$$+2\varkappa\int\limits_{\Omega}\big(\mathcal{E}(v)W_{\rho}(v) - W_{\rho}(v)\mathcal{E}(v)\big):\nabla\varphi\,dx = \langle f,\varphi\rangle \qquad (1.2.5)$$

и начальному условию $v(0) = v_0$.

Замечание 1.2.1. *Задание начального условия для функции из пространства* E_1 *корректно в силу следующей леммы см. [60]:*

Лемма 1.2.1. *Пусть* V, H, V^* *— тройка гильбертовых пространств, таких что* $V \subset H \equiv H^* \subset V^*$. *Здесь вложения непрерывны,* H^* *и* V^* *— пространства сопряженные к пространствам* H *и* V *соответственно, пространства* H *и* H^* *отождествлены по теореме Рисса. Если функция* u *принадлежит пространству* $L_2(0,T;V)$, *а её производная* u' *принадлежит* $L_2(0,T;V^*)$, *то функция* u *почти всюду равна некоторой непрерывной функции из* $[0,T]$ *в* H *(то есть функции из* $C([0,T],H)$*) и имеет место следующее равенство, которое выполняется в смысле скалярных распределений на* $(0,T)$:

$$\frac{d}{dt}\|u\|_H^2 = 2\langle u', u\rangle_{V^*\times V}.$$

Основными результатами данного параграфа являются следующие теоремы:

Теорема 1.2.1. *Для любых* $f \in L_2(0,T;V^{-1})$ *и* $v_0 \in V^1$ *начально–краевая задача* (1.2.1)–(1.2.4) *имеет хотя бы одно слабое решение* $v_* \in E_1$.

Доказательство данной теоремы основано на введение аппроксимационной задачи, установление разрешимости данной аппроксимационной задачи и последующем предельном переходе.

Теорема 1.2.2. *Пусть выполнены условия теоремы 1.2.1. Кроме того, если рассмотреть семейство альфа–моделей* (1.2.1)–(1.2.4)*, зависящих от параметра α_m, то существует последовательность решений v_m семейства альфа–моделей* (1.2.1)–(1.2.4)*, которая при стремлении α_m к нулю сходится к слабому решению $v \in E_1$ исходной начально–краевой задачи.*

Для доказательства данной теоремы необходимо показать, что последовательность решений исследуемой альфа–модели сходится к решению исходной модели, описывающей движение растворов полимеров.

1.2.2 Аппроксимационная задача

На протяжении этого пункта будем предполагать, что $f \in L_2(0,T;V^{-1})$ и $v_0 \in V^3$. Рассмотрим следующую аппроксимационную задачу с малым параметром $\varepsilon > 0$:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial \Delta^3 v}{\partial t} + \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \nu\Delta v - \varkappa\frac{\partial \Delta v}{\partial t} - 2\varkappa \mathrm{Div}\Big(\sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial \mathcal{E}(v)}{\partial x_i}\Big) -$$

$$-2\varkappa \mathrm{Div}\big(\mathcal{E}(v)W_\rho(v) - W_\rho(v)\mathcal{E}(v)\big) + \mathrm{grad}\, p = f; \tag{1.2.6}$$

$$u = (I - \alpha^2\Delta)^{-1} v, \quad t \in [0,T], \quad x \in \Omega, \tag{1.2.7}$$

$$\mathrm{div}\, v = 0, \quad (t,x) \in (0,T)\times\Omega; \quad v(x,0) = v_0(x), \quad x \in \Omega; \tag{1.2.8}$$

$$v|_{\partial\Omega\times[0,T]} = 0, \quad \Delta v|_{\partial\Omega\times[0,T]} = 0, \quad \Delta^2 v|_{\partial\Omega\times[0,T]} = 0. \tag{1.2.9}$$

По аналогии с определением слабого решения для начально–краевой задачи (1.2.1)–(1.2.4), мы сформулируем определение слабого решения *вспомогательной задачи* (1.2.6)–(1.2.9).

Определение 1.2.2. *Слабым решением начально–краевой задачи* (1.2.6)–(1.2.9) *называется функция $v \in E_2$, удовлетворяющая для любого $\varphi \in V^3$ и почти всех $t \in (0,T)$ равенству*

$$\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial t}\varphi\, dx - \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n (\Delta_\alpha^{-1} v)_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx +$$

$$+\nu\int_\Omega \nabla v : \nabla\varphi\, dx + \varkappa\int_\Omega \nabla\Big(\frac{\partial v}{\partial t}\Big) : \nabla\varphi\, dx + \varepsilon\int_\Omega \nabla\Big(\Delta(\frac{\partial v}{\partial t})\Big) : \nabla(\Delta\varphi)\, dx -$$

$$-\varkappa\int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx - \varkappa\int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx +$$

$$+2\varkappa\int\limits_{\Omega}\big(\mathcal{E}(v)W_\rho(v)-W_\rho(v)\mathcal{E}(v)\big):\nabla\varphi\,dx=$$

$$=\langle f,\varphi\rangle \tag{1.2.10}$$

и начальному условию $v(0)=v_0$.

Отметим, что (1.2.10) отличается от (1.2.5) наличием члена

$$\varepsilon\int\limits_{\Omega}\nabla\Big(\Delta\frac{\partial v}{\partial t}\Big):\nabla\Big(\Delta\varphi\Big)\,dx.$$

Далее будет доказано существование решения аппроксимационной задачи и показано, что из последовательности её решений можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к слабому решению начально–краевой задачи (1.2.1)–(1.2.4) при стремлении параметра аппроксимации ε к нулю. Для этого перейдем к операторной трактовке аппроксимационной задачи. Определим операторы с помощью следующих равенств:

$$N:V^3\to V^{-3},\quad \langle Nv,\varphi\rangle=\int\limits_{\Omega}\nabla(\Delta v):\nabla(\Delta\varphi)\,dx,\quad v,\varphi\in V^3;$$

$$B_1:L_4(\Omega)\to V^{-1},\quad \langle B_1(v),\varphi\rangle=\int\limits_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{n}(\Delta_\alpha^{-1}v)_i v_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx,\quad v\in L_4(\Omega),\ \varphi\in V^1;$$

$$B_2:V^1\to V^{-3},\quad \langle B_2(v),\varphi\rangle=\int\limits_{\Omega}\sum_{i,j,k=1}^{n}v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i\partial x_k}\,dx,\quad v\in V^1,\ \varphi\in V^3;$$

$$B_3:V^1\to V^{-3},\quad \langle B_3(v),\varphi\rangle=\int\limits_{\Omega}\sum_{i,j,k=1}^{n}v_k\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i\partial x_k}\,dx,\quad v\in V^1,\ \varphi\in V^3;$$

$$D:V^1\to V^{-3},\langle D(v),\varphi\rangle=\int\limits_{\Omega}\big(\mathcal{E}(v)W_\rho(v)-W_\rho(v)\mathcal{E}(v)\big):\nabla\varphi\,dx,v\in V^1,\varphi\in V^3;$$

$$J:V^3\to V^{-3},\quad \langle Jv,\varphi\rangle=\int\limits_{\Omega}v\varphi\,dx,\quad v,\varphi\in V^3.$$

Поскольку в интегральном равенстве (1.2.10) функция $\varphi\in V^3$ произвольна, то это равенство эквивалентно следующему операторному уравнению:

$$Jv'+\varepsilon Nv'+\varkappa Av'+\nu Av-B_1(v)-\varkappa B_2(v)-\varkappa B_3(v)+2\varkappa D(v)=f \tag{1.2.11}$$

в $L_2(0,T;V^{-3})$, где $A : V^1 \to V^{-1}$, $\quad \langle Av, \varphi\rangle = \int\limits_\Omega \nabla v : \nabla \varphi \, dx, \quad v, \varphi \in V^1.$

Таким образом, слабое решение аппроксимационной задачи – это решение $v \in E_2$ операторного уравнения (1.2.11), удовлетворяющее начальному условию $v(0) = v_0$.

Также введём операторы при помощи следующих равенств:

$$L : E_2 \to L_2(0,T;V^{-3}) \times V^3, \quad L(v) = ((J + \varepsilon N + \varkappa A)v', v|_{t=0});$$
$$K : E_2 \to L_2(0,T;V^{-3}) \times V^3,$$
$$K(v) = (\nu Av - B_1(v) - \varkappa B_2(v) - \varkappa B_3(v) + 2\varkappa D(v), 0)\,.$$

Тогда задача о нахождении решения операторного уравнения (1.2.11), удовлетворяющего начальному условию $v(0) = v_0$, эквивалентна задаче о нахождении решения следующего операторного уравнения

$$L(v) + K(v) = (f, v_0). \tag{1.2.12}$$

Чтобы не нагромождать обозначения, будем использовать одну и ту же букву для обозначения операторов, действующих в разных функциональных пространствах.

Лемма 1.2.2. *Для операторов $A, N, J + \varepsilon N + \varkappa A, J + \varkappa A, B_i$, $i = 1,2,3$, имеют место следующие свойства:*

1. *Для любой $v \in E_2$ функция $Av \in L_2(0,T;V^{-3})$, оператор $A : E_2 \to L_2(0,T;V^{-3})$ – компактен и имеет место оценка*

$$\|Av\|_{L_2(0,T;V^{-3})} \leqslant C_1\|v\|_{C([0,T],V^1)}. \tag{1.2.13}$$

2. *Для любой $v \in L_2(0,T;V^3)$ функция $Nv \in L_2(0,T;V^{-3})$, оператор $N : L_2(0,T;V^3) \to L_2(0,T;V^{-3})$ – непрерывен и имеет место оценка:*

$$\|Nv\|_{L_2(0,T;V^{-3})} \leqslant \|v\|_{L_2(0,T;V^3)}. \tag{1.2.14}$$

3. *Для любой $v \in L_2(0,T;V^3)$ функция $(J + \varepsilon N + \varkappa A)v \in L_2(0,T;V^{-3})$ и оператор $(J + \varepsilon N + \varkappa A) : L_2(0,T;V^3) \to L_2(0,T;V^{-3})$ – непрерывен, обратим и для него имеет место оценка*

$$\varepsilon\|v\|_{L_2(0,T;V^3)} \leqslant \|(J + \varepsilon N + \varkappa A)v\|_{L_2(0,T;V^{-3})} \leqslant$$
$$\leqslant (C_2 + \varepsilon + \varkappa C_3)\,\|v\|_{L_2(0,T;V^3)}. \tag{1.2.15}$$

Кроме того, обратный оператор $(J+\varepsilon N+\varkappa A)^{-1}: L_2(0,T;V^{-3}) \to L_2(0,T;V^3)$ *также непрерывен.*

4. *Для любой* $v \in L_2(0,T;V^{-1})$ *функция* $(J+\varkappa A)v \in L_2(0,T;V^{-3})$, *оператор* $(J+\varkappa A): L_2(0,T;V^{-1}) \to L_2(0,T;V^{-3})$ *непрерывен и имеет место следующая оценка*

$$C_4\|v\|_{L_2(0,T;V^{-1})} \leqslant \|(J+\varkappa A)v\|_{L_2(0,T;V^{-3})}. \tag{1.2.16}$$

5. *Для* $i=2,3$ *и любой* $v \in E_2$ *функция* $B_i(v) \in L_2(0,T;V^{-3})$ *и оператор* $B_i: E_2 \to L_2(0,T;V^{-3})$ *— компактен и для него имеет место оценка*

$$\|B_i(v)\|_{L_2(0,T;V^{-3})} \leqslant C_5\|v\|^2_{C([0,T],V^1)}. \tag{1.2.17}$$

Доказательство последней леммы подробно приведено в [32].

Лемма 1.2.3. *1) Отображение* $B_1: L_4(\Omega) \to V^{-1}$ *непрерывно и для него имеет место оценка:*

$$\|B_1(v)\|_{V^{-1}} \leqslant C_6\|v\|^2_{L_4(\Omega)}. \tag{1.2.18}$$

2) Для любого $v \in L_4(0,T;L_4(\Omega))$ *функция* $B_1(v) \in L_2(0,T;V^{-1})$ *и отображение* $B_1: L_4(0,T;L_4(\Omega)) \to L_2(0,T;V^{-1})$ *— непрерывно.*

3) Для любой функции $v \in E_2$ *функция* $B_1(v) \in L_2(0,T;V^{-1})$ *и отображение* $B_1: E_2 \to L_2(0,T;V^{-1})$ *является компактным.*

Доказательство. 1) Для любых $v \in L_4(\Omega)$, $\varphi \in V^1$, используя неравенство Гельдера, мы получим

$$|\langle B_1(v),\varphi\rangle| = \Big|\sum_{i,j=1}^n \int_\Omega (\Delta_\alpha^{-1}v)_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\,dx\Big| \leqslant \sum_{i,j=1}^n \Big(\int_\Omega |(\Delta_\alpha^{-1}v)_i v_j|^2\,dx\Big)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \Big(\int_\Omega \Big|\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\Big|^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant \sum_{i,j=1}^n \Big(\int_\Omega |(\Delta_\alpha^{-1}v)_i|^4\,dx\Big)^{\frac{1}{4}} \Big(\int_\Omega |v_j|^4\,dx\Big)^{\frac{1}{4}} \|\varphi\|_{V^1} \leqslant$$

$$\leqslant C_7\|\Delta_\alpha^{-1}v\|_{L_4(\Omega)}\|v\|_{L_4(\Omega)}\|\varphi\|_{V^1} \leqslant C_7C_8\|v\|^2_{L_4(\Omega)}\|\varphi\|_{V^1} = C_9\|v\|^2_{L_4(\Omega)}\|\varphi\|_{V^1}.$$

Откуда следует неравенство (1.2.18). Отметим, что здесь мы воспользовались следующей известной оценкой (см. [1], [65]):

$$\|\Delta_\alpha^{-1}v\|_{L_p(\Omega)} = \|(I-\alpha^2\Delta)^{-1}v\|_{L_p(\Omega)} \leqslant C_8\|v\|_{L_p(\Omega)}, \quad p>1. \tag{1.2.19}$$

Покажем непрерывность отображения $B_1 : L_4(\Omega) \to V^{-1}$. Для произвольных v^m, $v^0 \in L_4(\Omega)$ имеем

$$
\begin{gathered}
|\langle B_1(v^m), \varphi\rangle - \langle B_1(v^0), \varphi\rangle| = \\
= \Big| \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n (\Delta_\alpha^{-1} v^m)_i v_j^m \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx - \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n (\Delta_\alpha^{-1} v^0)_i v_j^0 \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx \Big| \leqslant \\
\leqslant \sum_{i,j=1}^n \|(\Delta_\alpha^{-1} v^m)_i v_j^m - (\Delta_\alpha^{-1} v^0)_i v_j^0\|_{L_2(\Omega)} \Big\|\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\Big\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \\
\leqslant \|\varphi\|_{V^1} \sum_{i,j=1}^n \|(\Delta_\alpha^{-1} v^m)_i v_j^m - (\Delta_\alpha^{-1} v^0)_i v_j^0\|_{L_2(\Omega)} = \\
= \|\varphi\|_{V^1} \Big(\sum_{i,j=1}^n \|(\Delta_\alpha^{-1} v^m)_i v_j^m - (\Delta_\alpha^{-1} v^m)_i v_j^0 + (\Delta_\alpha^{-1} v^m)_i v_j^0 - (\Delta_\alpha^{-1} v^0)_i v_j^0\|_{L_2(\Omega)} \Big) \leqslant \\
\leqslant \|\varphi\|_{V^1} \Big(\sum_{i,j=1}^n \|(\Delta_\alpha^{-1} v^m)_i v_j^m - (\Delta_\alpha^{-1} v^m)_i v_j^0\|_{L_2(\Omega)} + \\
+ \sum_{i,j=1}^n \|(\Delta_\alpha^{-1} v^m)_i v_j^0 - (\Delta_\alpha^{-1} v^0)_i v_j^0\|_{L_2(\Omega)} \Big) \leqslant \\
\leqslant C_9 \|\varphi\|_{V^1} \Big(\sum_{j=1}^n \|\Delta_\alpha^{-1} v^m\|_{L_4(\Omega)} \|v_j^m - v_j^0\|_{L_4(\Omega)} + \\
+ \sum_{j=1}^n \|\Delta_\alpha^{-1} (v^m - v^0)\|_{L_4(\Omega)} \|v_j^0\|_{L_4(\Omega)} \Big) \leqslant \\
\leqslant C_9 C_8 \|\varphi\|_{V^1} \Big(\sum_{j=1}^n \|v^m\|_{L_4(\Omega)} \|v_j^m - v_j^0\|_{L_4(\Omega)} + \sum_{j=1}^n \|v^m - v^0\|_{L_4(\Omega)} \|v_j^0\|_{L_4(\Omega)} \Big) \leqslant \\
\leqslant C_{10} (\|v^m\|_{L_4(\Omega)} \|v^m - v^0\|_{L_4(\Omega)} + \|v^m - v^0\|_{L_4(\Omega)} \|v^0\|_{L_4(\Omega)}) \|\varphi\|_{V^1} = \\
= C_{11} (\|v^m\|_{L_4(\Omega)} + \|v^0\|_{L_4(\Omega)}) \|v^m - v^0\|_{L_4(\Omega)} \|\varphi\|_{V^1}.
\end{gathered}
$$

Таким образом,

$$
\|B_1(v^m) - B_1(v^0)\|_{V^{-1}} \leqslant C_{11} (\|v^m\|_{L_4(\Omega)} + \|v^0\|_{L_4(\Omega)}) \|v^m - v^0\|_{L_4(\Omega)}.
$$

Полагая $v^m \to v^0$ в $L_4(\Omega)$, получаем, что отображение $B_1 : L_4(\Omega) \to V^{-1}$ является непрерывным.

2) Для доказательства необходимо воспользоваться последней оценкой и повторить доказательство леммы 2.5.4 (пункт 2) из [32].

3) Для доказательства этого пункта воспользуемся теоремой Симона 1.1.5. Рассмотрим множество $F = \{v \in L_4(0,T;V^3), v' \in L_2(0,T;L_2(\Omega))\}$. Так как вложение $V^3 \subset L_4(\Omega)$ является компактным, то компактным является вложение $F \subset L_4(0,T;L_4(\Omega))$.

Из непрерывных вложений

$$C([0,T];V^3) \subset L_4(0,T;V^3), \quad L_2(0,T;V^3) \subset L_2(0,T;L_2(\Omega))$$

следует непрерывное вложение $E_2 \subset F$. Кроме того, из второго пункта настоящей леммы мы имеем, что оператор $B_1 : L_4(0,T;L_4(\Omega)) \to L_2(0,T;V^{-1})$ является непрерывным. Таким образом, имеем следующую суперпозицию вложений:

$$E_2 \subset F \subset L_4(0,T;L_4(\Omega)) \xrightarrow{B_1} L_2(0,T;V^{-1}),$$

где первое вложение непрерывно, второе — компактно и отображение B — непрерывно. Следовательно, для любой функции $v \in E_2$ получим, что функция $B_1(v) \in L_2(0,T;V^{-1})$, а отображение $B_1 : E_2 \to L_2(0,T;V^{-1})$ — компактно. Лемма доказана. □

Лемма 1.2.4. *Для оператора D имеют место следующие свойства:*

1. *Оператор $D : V^1 \to V^{-3}$ — непрерывен и для любой функции $v \in V^1$ имеет место оценка:*

$$\|D(v)\|_{V^{-3}} \leqslant C_{12}\|v\|^2_{V^1}. \tag{1.2.20}$$

2. *Для любой функции $v \in L_4(0,T;V^1)$ функция $D(v) \in L_2(0,T;V^{-3})$ и оператор $D : L_4(0,T;V^1) \to L_2(0,T;V^{-3})$ — непрерывен.*
3. *Для любой функции $v \in E_2$ функция $D(v) \in L_2(0,T;V^{-3})$ и оператор $D : E_2 \to L_2(0,T;V^{-3})$ — компактен и для него имеет место оценка*

$$\|D(v)\|_{L_2(0,T;V^{-3})} \leqslant C_{13}\|v\|^2_{C([0,T],V^1)}. \tag{1.2.21}$$

Доказательство. 1) Получим необходимые оценки для тензора $\mathcal{E}$:

$$\|\mathcal{E}(v)\|^2_{L_2(\Omega)} = \sum_{i,j=1}^{n} \|\mathcal{E}_{ij}(v)\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant C_{14} \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} (\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i})^2\, dx =$$

$$= C_{14} \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} (\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + 2\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\frac{\partial v_j}{\partial x_i})\, dx =$$

$$= C_{14}\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_{\Omega}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\,dx - 2C_{14}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega}v_i\frac{\partial}{\partial x_i}(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial v_j}{\partial x_j})\,dx+$$

$$+C_{14}\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_{\Omega}\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\,dx = C_{14}\Big[\int\limits_{\Omega}\nabla v:\nabla v\,dx + \int\limits_{\Omega}\nabla v:\nabla v\,dx\Big] = 2C_{14}\|v\|^2_{V^1}.$$

Теперь получим необходимые оценки для тензора W_ρ:

$$\|W_\rho(v)\|_{L_2(\Omega)} = \sum_{i,j=1}^{n}\|(W_\rho)_{ij}(v)\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C_{15}\sum_{i,j=1}^{n}\|(W_\rho)_{ij}(v)\|_{L_\infty(\Omega)} =$$

$$= \frac{1}{2}C_{15}\sum_{i,j=1}^{n}\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega}|\int\limits_{\Omega}\rho(x-y)(\frac{\partial v_i(t,y)}{\partial y_j} - \frac{\partial v_j(t,y)}{\partial y_i})\,dy| =$$

$$= \frac{1}{2}C_{15}\sum_{i,j=1}^{n}\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega}|\int\limits_{\Omega}-\frac{\partial\rho(x-y)}{\partial y_j}v_i(t,y) + \frac{\partial\rho(x-y)}{\partial y_i}v_j(t,y)\,dy| \leqslant$$

$$\leqslant C_{16}\|\text{grad }\rho\|_{L_2(\Omega)}\|v(t)\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C_{17}\|\text{grad }\rho\|_{L_2(\Omega)}\|v(t)\|_{V^1}.$$

Далее для любых $v\in V^1, \varphi\in V^3$ в силу определения оператора D имеем

$$|\langle D(v),\varphi\rangle| = \left|\int\limits_{\Omega}(\mathcal{E}(v)W_\rho(v) - W_\rho(v)\mathcal{E}(v)):\nabla\varphi\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant C_{18}[\|\mathcal{E}(v)\|_{L_2(\Omega)}\|W_\rho(v)\|_{L_2(\Omega)} + \|W_\rho(v)\|_{L_2(\Omega)}\|\mathcal{E}(v)\|_{L_2(\Omega)}]\|\varphi\|_{C(\Omega)} \leqslant$$
$$\leqslant C_{19}\|v\|^2_{V^1}\|\varphi\|_{V^3}.$$

Отсюда и следует требуемая оценка (1.2.20).

Докажем непрерывность оператора D. Для произвольных $v^m, v^0 \in V^1$ имеем:

$$\big|\langle D(v^m),\varphi\rangle - \langle D(v^0),\varphi\rangle\big| = |\int\limits_{\Omega}(\mathcal{E}(v^m)W_\rho(v^m) - W_\rho(v^m)\mathcal{E}(v^m)):\nabla\varphi\,dx-$$

$$-\int\limits_{\Omega}(\mathcal{E}(v^0)W_\rho(v^0) - W_\rho(v^0)\mathcal{E}(v^0)):\nabla\varphi\,dx| \leqslant$$

$$\leqslant C_{20}\int\limits_{\Omega}|\mathcal{E}(v^m)W_\rho(v^m) - W_\rho(v^m)\mathcal{E}(v^m) - \mathcal{E}(v^0)W_\rho(v^0) + W_\rho(v^0)\mathcal{E}(v^0)|\,dx\times$$

$$\times\|\varphi\|_{V^3} \leqslant C_{20}\int\limits_{\Omega}|(\mathcal{E}(v^m)(W_\rho(v^m) - W_\rho(v^0)) + (\mathcal{E}(v^m) - \mathcal{E}(v^0))W_\rho(v^0)-$$

$$-W_\rho(v^m)(\mathcal{E}(v^m)-\mathcal{E}(v^0))-(W_\rho(v^m)-W_\rho(v^0))\mathcal{E}(v^0)|\,dx\|\varphi\|_{V^3}\leqslant$$
$$\leqslant C_{20}[\|(\mathcal{E}(v^m)\|_{L_2(\Omega)}\|(W_\rho(v^m-v^0))\|_{L_2(\Omega)}+$$
$$+\|(\mathcal{E}(v^m-v^0))\|_{L_2(\Omega)}\|W_\rho(v^0)\|_{L_2(\Omega)}+\|W_\rho(v^m)\|_{L_2(\Omega)}\|(\mathcal{E}(v^m-v^0))\|_{L_2(\Omega)}+$$
$$+\|(W_\rho(v^m-v^0))\|_{L_2(\Omega)}\|\mathcal{E}(v^0)\|_{L_2(\Omega)}]\|\varphi\|_{V^3}\leqslant$$
$$\leqslant C_{21}[\|v^m\|_{V^1}\|v^m-v^0\|_{V^1}+\|v^m-v^0\|_{V^1}\|v^0\|_{V^1}+\|v^m\|_{V^1}\|v^m-v^0\|_{V^1}+$$
$$+\|v^m-v^0\|_{V^1}\|v^0\|_{V^1}]\|\varphi\|_{V^3}\leqslant C_{22}(\|v^m\|_{V^1}+\|v^0\|_{V^1})\|v^m-v^0\|_{V^1}\|\varphi\|_{V^3}.$$

Отсюда следует, что

$$\left\|D(v^m)-D(v^0)\right\|_{V^{-3}}\leqslant C_{22}\left(\|v^m\|_{V^1}+\left\|v^0\right\|_{V^1}\right)\left\|v^m-v^0\right\|_{V^1}. \tag{1.2.22}$$

Пусть последовательность $\{v^m\}\subset V^1$ сходится к некоторой предельной функции $v^0\in V^1$. Тогда непрерывность отображения $D:V^1\to V^{-3}$ следует из последнего неравенства.

2) Пусть $v\in L_4(0,T;V^1)$. Тогда из (1.2.20) при почти всех $t\in(0,T)$ получим оценку

$$\|D(v)(t)\|_{V^{-3}}\leqslant C_{12}\|v(t)\|^2_{V^1}.$$

Возводя эту оценку в квадрат и интегрируя по t от 0 до T, получим

$$\int\limits_0^T\|D(v)(t)\|^2_{V^{-3}}dt\leqslant C_{12}^2\int\limits_0^T\|v(t)\|^4_{V^1}dt=C_{12}^2\|v\|^4_{L_4(0,T;V^1)}.$$

Отсюда и следует, что $D(v)\in L_2(0,T;V^{-3})$.

Докажем теперь непрерывность оператора $D\ :\ L_4(0,T;V^1)\ \to L_2(0,T;V^{-3})$.

Пусть последовательность $\{v^m\}\ \subset\ L_4(0,T;V^1)$ сходится к $v^0\ \in L_4(0,T;V^1)$. Возведем неравенство (1.2.22) в квадрат и проинтегрируем по t от 0 до T. В силу неравенства Гёльдера, получим

$$\int\limits_0^T\left\|D(v^m)(t)-D(v^0)(t)\right\|^2_{V^{-3}}dt\leqslant$$

$$\leqslant C_{22}^2\int\limits_0^T\left(\|v^m(t)\|_{V^1}+\left\|v^0(t)\right\|_{V^1}\right)^2\left\|v^m(t)-v^0(t)\right\|^2_{V^1}dt\leqslant$$

$$\leqslant C_{22}^2 \Big(\int\limits_0^T \left(\|v^m(t)\|_{V^1} + \left\|v^0(t)\right\|_{V^1} \right)^4 \, dt \Big)^{\frac{1}{2}} \times \Big(\int\limits_0^T \|v^m(t) - v^0(t)\|_{V^1}^4 \, dt \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Далее, воспользовавшись неравенством Гёльдера имеем

$$\int\limits_0^T \left(\|v^m(t)\|_{V^1} + \left\|v^0(t)\right\|_{V^1} \right)^4 \, dt = \sum_{i=0}^4 \frac{4!}{i!(4-i)!} \int\limits_0^T \|v^m(t)\|_{V^1}^i \left\|v^0(t)\right\|_{V^1}^{4-i} dt \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^4 \frac{4!}{i!(4-i)!} \Big(\int\limits_0^T \|v^m(t)\|_{V^1}^4 \, dt \Big)^{\frac{i}{4}} \Big(\int\limits_0^T \left\|v^0(t)\right\|_{V^1}^4 dt \Big)^{\frac{4-i}{4}} =$$

$$= \sum_{i=0}^4 \frac{4!}{i!(4-i)!} \|v^m\|_{L_4(0,T;V^1)}^i \left\|v^0\right\|_{L_4(0,T;V^1)}^{4-i}.$$

Таким образом:

$$\left\|D(v^m) - D(v^0)\right\|_{L_2(0,T;V^{-3})} \leqslant C_{22}^2 \|v^m - v^0\|_{L_4(0,T;V^1)} \times$$

$$\times \Big(\sum_{i=0}^4 \frac{4!}{i!(4-i)!} \|v^m\|_{L_4(0,T;V^1)}^i \left\|v^0\right\|_{L_4(0,T;V^1)}^{4-i} \Big)^{\frac{1}{4}}.$$

Так как правая часть неравенства стремится к нулю при $m \to +\infty$, то стремится к нулю и левая часть. Отсюда и следует, что оператор $D : L_4(0,T;V^1) \to L_2(0,T;V^{-3})$ — непрерывен.

3) Для доказательства утверждения этого пункта мы воспользуемся теоремой Симона 1.1.5. В данном случае

$$X = V^3,\ E = V^1,\ Y = V^0,$$

$$F = \{v : v \in L_4(0,T;V^3); v' \in L_2(0,T;V^0)\}.$$

Вложение $V^3 \subset V^1$ — компактно, поэтому пространство F вложено в $L_4(0,T;V^1)$ компактно.

Из непрерывности следующих вложений

$$C([0,T], V^3) \subset L_4(0,T;V^3), \quad L_2(0,T;V^3) \subset L_2(0,T;V^0)$$

следует, что $E_2 \subset F$, причём вложение непрерывно.

Из второго пункта этой леммы мы имеем, что отображение $D : L_4(0,T;V^1) \to L_2(0,T;V^{-3})$ — непрерывно.

В итоге

$$E_2 \subset F \subset L_4(0,T;V^1) \xrightarrow{D} L_2(0,T;V^{-3}).$$

Здесь первое вложение непрерывно, второе вложение — компактно, а отображение D — непрерывно. Таким образом для любой функции $v \in E_2$ получим, что функция $D(v) \in L_2(0,T;V^{-3})$, а отображение $D : E_2 \to L_2(0,T;V^{-3})$ — компактно.

Покажем теперь оценку (1.2.21). В силу неравенства (1.2.20) при всех $t \in [0,T]$ имеет место следующая оценка

$$\|D(v)(t)\|_{V^{-3}} \leqslant C_{12}\|v(t)\|^2_{V^1}.$$

Возводя её в квадрат и интегрируя по t от 0 до T получим

$$\int\limits_0^T \|D(v)(t)\|^2_{V^{-3}}dt \leqslant C_{12}^2 \int\limits_0^T \|v(t)\|^4_{V^1}dt \leqslant C_{12}^2 T\|v\|^4_{C([0,T],V^1)}.$$

Откуда и следует требуемая оценка (1.2.21) с константой $C_{13} = C_{12}\sqrt{T}$. □

Лемма 1.2.5. *Для операторов L и K имеют место следующие свойства:*

1. *Оператор $L : E_2 \to L_2(0,T;V^{-3}) \times V^3$ — обратим и обратный оператор непрерывен.*
2. *Оператор $K : E_2 \to L_2(0,T;V^{-3}) \times V^3$ — компактен.*

Доказательство. *1)* Для доказательства утверждения первого пункта воспользуемся теоремой Банаха об обратном отображении.

Сначала покажем непрерывность линейного оператора

$$L : E_2 \to L_2(0,T;V^{-3}) \times V^3, \quad L(v) = ((J + \varepsilon N + \varkappa A)v', v|_{t=0}).$$

В силу оценки (1.2.15) имеем

$$\begin{aligned}
\|L(v)\|_{L_2(0,T;V^{-3})\times V^3} &= \|(J + \varepsilon N + \varkappa A)v'\|_{L_2(0,T;V^{-3})} + \|v|_{t=0}\|_{V^3} \leqslant \\
&\leqslant (C_2 + \varepsilon + \varkappa C_3)\,\|v'\|_{L_2(0,T;V^3)} + \max_{t\in[0,T]}\|v(t)\|_{V^3} = \\
&= (C_2 + \varepsilon + \varkappa C_3)\,\|v'\|_{L_2(0,T;V^3)} + \|v\|_{C([0,T],V^3)} \leqslant \\
&\leqslant (C_2 + \varepsilon + \varkappa C_3 + 1)\left(\|v'\|_{L_2(0,T;V^3)} + \|v\|_{C([0,T],V^3)}\right) = \\
&= (C_2 + \varepsilon + \varkappa C_3 + 1)\,\|v\|_{E_2}.
\end{aligned}$$

Из последней оценки получаем, что оператор L непрерывен.

Покажем теперь взаимно однозначность оператора L. Для этого достаточно показать, что задача

$$(J + \varepsilon N + \varkappa A)v' = f \tag{1.2.23}$$

$$v|_{t=0} = v_0 \tag{1.2.24}$$

имеет единственное решение $v \in E_2$ для любых $f \in L_2(0, T; V^{-3}), v_0 \in V^3$.

Поскольку оператор $(J + \varepsilon N + \varkappa A)$ обратим как оператор из $L_2(0, T; V^3)$ в $L_2(0, T; V^{-3})$, то, применяя $(J+\varepsilon N+\varkappa A)^{-1}$ к уравнению (1.2.23), получим, что

$$v' = (J + \varepsilon N + \varkappa A)^{-1} f \quad \text{и} \quad v' \in L_2(0, T; V^3).$$

Откуда, в силу (1.2.24)

$$v(t) = \int\limits_0^t (J + \varepsilon N + \varkappa A)^{-1} f(s)\, ds + v_0.$$

Таким образом, из вида решения получаем, что $v \in C([0, T], V^3)$. Отсюда следует, что $v \in E_2$.

Покажем, что решение единственно. Действительно, если существует второе решение $u \in E_2\, (u \neq v)$ задачи (1.2.23), (1.2.24), то разность $(v - u)$ является решением следующей задачи:

$$(J + \varepsilon N + \varkappa A)(v' - u') = 0,$$

$$(v - u)|_{t=0} = 0.$$

Из ранее полученной формулы для решения этой задачи следует, что $u - v = 0$. Таким образом получили противоречие с нашим предположением о том, что $u \neq v$. Следовательно, оператор L взаимно однозначен.

Таким образом в силу теоремы Банаха об обратном отображении оператор $L : E_2 \to L_2(0, T; V^{-3}) \times V^3$ обратим и обратный оператор $L^{-1} : L_2(0, T; V^{-3}) \times V^3 \to E_2$ непрерывен.

2) Компактность оператора

$$K : E_2 \to L_2(0, T; V^{-3}) \times V^3,$$

$$K(v) = (\nu Av - B_1(v) - \varkappa B_2(v) - \varkappa B_3(v) + 2\varkappa D(v), 0)$$

следует из компактности операторов $A : E_2 \to L_2(0,T;V^{-3})$ лемма 1.2.2 пункт *1; $B_1 : E_2 \to L_2(0,T;V^{-3})$ лемма 1.2.3 пункт 3; $B_2 : E_2 \to L_2(0,T;V^{-3})$ лемма 1.2.2 пункт 7; $B_3 : E_2 \to L_2(0,T;V^{-3})$ лемма 1.2.2 пункт 7; $D : E_2 \to L_2(0,T;V^{-3})$ лемма 1.2.4 пункт 3.* □

1.2.3 Априорные оценки

Вместе с уравнением (1.2.12) мы будем рассматривать следующее семейство операторных уравнений

$$L(v) + \lambda K(v) = \lambda(f, v_0), \quad \lambda \in [0,1], \tag{1.2.25}$$

которое совпадает с (1.2.12) при $\lambda = 1$.

Теорема 1.2.3. *Если $v \in E_2$ — решение операторного уравнения* (1.2.25) *для некоторого* $\lambda \in [0,1]$, *то для него имеют место следующие оценки:*

$$\varepsilon\|v\|^2_{C([0,T],V^3)} \leqslant C_{23} + 2\varepsilon\|v_0\|^2_{V^3}, \tag{1.2.26}$$

$$\varkappa\|v\|^2_{C([0,T],V^1)} \leqslant C_{23} + 2\varepsilon\|v_0\|^2_{V^3}, \tag{1.2.27}$$

где

$$C_{23} = \frac{4T}{\varkappa}\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} + 2\|v_0\|^2_{V^0} + 2\varkappa\|v_0\|^2_{V^1}.$$

Доказательство. Пусть $v \in E_2$ — решение (1.2.25) для некоторого $\lambda \in [0,1]$, тогда для v при любом $\varphi \in V^3$ и почти всех $t \in (0,T)$ имеет место равенство:

$$\int\limits_\Omega v'(t)\varphi\,dx - \lambda\int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n (\Delta_\alpha^{-1}v)_i(t)v_j(t)\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx + \lambda\nu\int\limits_\Omega \nabla v(t) : \nabla\varphi\,dx +$$

$$+\varepsilon\int\limits_\Omega \nabla\Delta v'(t) : \nabla\Delta\varphi\,dx + \varkappa\int\limits_\Omega \nabla v'(t) : \nabla\varphi\,dx -$$

$$-\lambda\varkappa\int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k(t)\frac{\partial v_i(t)}{\partial x_j}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i\partial x_k}\,dx - \lambda\varkappa\int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k(t)\frac{\partial v_j(t)}{\partial x_i}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i\partial x_k}\,dx +$$

$$+2\lambda\varkappa\int\limits_\Omega (\mathcal{E}(v)W_\rho(v) - W_\rho(v)\mathcal{E}(v)) : \nabla\varphi\,dx = \lambda\langle f(t), \varphi\rangle \tag{1.2.28}$$

и v удовлетворяет начальному условию $v(0) = \lambda v_0$.

Заметим, что

$$\int\limits_{\Omega}\sum_{i,j,k=1}^{n} v_k(t)\frac{\partial v_i(t)}{\partial x_j}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i\partial x_k}\,dx+\int\limits_{\Omega}\sum_{i,j,k=1}^{n} v_k(t)\frac{\partial v_j(t)}{\partial x_i}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i\partial x_k}\,dx=$$

$$=2\int\limits_{\Omega}\sum_{i,j,k=1}^{n} v_k(t)\mathcal{E}_{ij}(v)(t)\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i\partial x_k}\,dx=-2\int\limits_{\Omega}\sum_{i,j,k=1}^{n} v_k(t)\frac{\partial\mathcal{E}_{ij}(v)(t)}{\partial x_k}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx-$$

$$-2\int\limits_{\Omega}\sum_{i,j,k=1}^{n}\frac{\partial v_k(t)}{\partial x_k}\mathcal{E}_{ij}(v)(t)\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx=-2\int\limits_{\Omega}\sum_{i,j,k=1}^{n} v_k(t)\frac{\partial\mathcal{E}_{ij}(v)(t)}{\partial x_k}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx-$$

$$-2\int\limits_{\Omega}\operatorname{div}\,v(t)\sum_{i,j=1}^{n}\mathcal{E}_{ij}(v)(t)\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx=-2\int\limits_{\Omega}\sum_{i,j,k=1}^{n} v_k(t)\frac{\partial\mathcal{E}_{ij}(v)(t)}{\partial x_k}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx.$$

Тогда (1.2.28) можно переписать в виде

$$\int\limits_{\Omega} v'(t)\varphi\,dx-\lambda\int\limits_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{n}(\Delta_\alpha^{-1}v)_i(t)v_j(t)\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx+\lambda\nu\int\limits_{\Omega}\nabla v(t):\nabla\varphi\,dx+$$

$$+\varepsilon\int\limits_{\Omega}\nabla\left(\Delta v'(t)\right):\nabla\left(\Delta\varphi\right)\,dx+\varkappa\int\limits_{\Omega}\nabla\left(v'(t)\right):\nabla\varphi\,dx+$$

$$+2\lambda\varkappa\int\limits_{\Omega}\sum_{i,j,k=1}^{n} v_k(t)\frac{\partial\mathcal{E}_{ij}(v)(t)}{\partial x_k}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx+$$

$$+2\lambda\varkappa\int\limits_{\Omega}(\mathcal{E}(v)W_\rho(v)-W_\rho(v)\mathcal{E}(v)):\nabla\varphi\,dx=\lambda\langle f(t),\varphi\rangle.$$

Поскольку последнее равенство имеет место при всех $\varphi\in V^3$, то оно имеет место и при $\varphi=v$.

$$\int\limits_{\Omega} v'(t)v(t)dx-\lambda\int\limits_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{n}(\Delta_\alpha^{-1}v)_i(t)v_j(t)\frac{\partial v_j(t)}{\partial x_i}\,dx+\lambda\nu\int\limits_{\Omega}\nabla v(t):\nabla v(t)dx+$$

$$+\varepsilon\int\limits_{\Omega}\nabla\left(\Delta v'(t)\right):\nabla\left(\Delta v(t)\right)\,dx+\varkappa\int\limits_{\Omega}\nabla\left(v'(t)\right):\nabla v(t)dx+$$

$$+2\lambda\varkappa\int\limits_{\Omega}\sum_{i,j,k=1}^{n} v_k(t)\frac{\partial\mathcal{E}_{ij}(v)(t)}{\partial x_k}\frac{\partial v_j(t)}{\partial x_i}\,dx+$$

$$+2\lambda\varkappa\int\limits_{\Omega}(\mathcal{E}(v)W_\rho(v)-W_\rho(v)\mathcal{E}(v)):\nabla v\,dx=\lambda\langle f(t),v\rangle. \tag{1.2.29}$$

Преобразуем слагаемые в левой части (1.2.29) следующим образом:

$$\int\limits_\Omega v'(t)v(t)dx = \frac{1}{2}\int\limits_\Omega \frac{\partial\left(v(t)v(t)\right)}{\partial t}\,dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_\Omega v(t)v(t)dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{V^0};$$

$$\varepsilon\int\limits_\Omega \nabla\Big(\Delta v'(t)\Big) : \nabla\Big(\Delta v(t)\Big)\,dx = \frac{\varepsilon}{2}\int\limits_\Omega \frac{\partial}{\partial t}\Big(\nabla(\Delta v(t)) : \nabla(\Delta v(t))\Big)\,dx =$$

$$= \frac{\varepsilon}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_\Omega \nabla(\Delta v(t)) : \nabla\left(\Delta v(t)\right)\,dx = \frac{\varepsilon}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{V^3};$$

$$\varkappa\int\limits_\Omega \nabla\left(v'(t)\right) : \nabla v(t)dx = \frac{\varkappa}{2}\int\limits_\Omega \frac{\partial}{\partial t}\Big(\nabla v(t) : \nabla v(t)\Big)\,dx = \frac{\varkappa}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{V^1};$$

$$\int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n (\Delta_\alpha^{-1}v)_i(t)v_j(t)\frac{\partial v_j(t)}{\partial x_i}\,dx = \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n (\Delta_\alpha^{-1}v)_i(t)\frac{\partial(v_j(t)v_j(t))}{\partial x_i}\,dx =$$

$$= -\int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial(\Delta_\alpha^{-1}v)_i(t)}{\partial x_i}v_j(t)v_j(t)\,dx = -\int\limits_\Omega \mathrm{div}\ u(t)\sum_{j=1}^n v_j(t)v_j(t)\,dx = 0;$$

$$\int\limits_\Omega (\mathcal{E}(v)W_\rho(v) - W_\rho(v)\mathcal{E}(v)) : \nabla v\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_\Omega (\mathcal{E}(v)W_\rho(v) - W_\rho(v)\mathcal{E}(v)) : (\mathcal{E}(v) + W(v))\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_\Omega (\mathcal{E}(v)W_\rho(v) - W_\rho(v)\mathcal{E}(v)) : \mathcal{E}(v)\,dx +$$

$$+ \frac{1}{2}\int\limits_\Omega (\mathcal{E}(v)W_\rho(v) - W_\rho(v)\mathcal{E}(v)) : W(v)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^n \int\limits_\Omega \mathcal{E}_{ij}(W_\rho)_{jk}\mathcal{E}_{ik} - (W_\rho)_{jk}\mathcal{E}_{ki}\mathcal{E}_{ji}\,dx +$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^n \int\limits_\Omega \mathcal{E}_{ij}(W_\rho)_{jk}W_{ik} - (W_\rho)_{kj}\mathcal{E}_{ji}W_{ki}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^n \int\limits_\Omega \mathcal{E}_{ij}(W_\rho)_{jk}\mathcal{E}_{ik} - \mathcal{E}_{ij}(W_\rho)_{jk}\mathcal{E}_{ik}\,dx +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^{n}\int\limits_{\Omega}\mathcal{E}_{ij}(W_\rho)_{jk}W_{ik}-\mathcal{E}_{ij}(W_\rho)_{jk}W_{ik}\,dx=0.$$

Последнее равенство выполнено в силу симметричности тензора $\mathcal{E}(v)$ и кососимметричности тензоров $W_\rho(v)$ и $W(v)$.

$$\int\limits_{\Omega}\sum_{i,j,k=1}^{n}v_k(t)\frac{\partial\mathcal{E}_{ij}(v)(t)}{\partial x_k}\frac{\partial v_j(t)}{\partial x_i}\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\int\limits_{\Omega}\sum_{i,j,k=1}^{n}v_k(t)\frac{\partial\mathcal{E}_{ij}(v)(t)}{\partial x_k}\frac{\partial v_j(t)}{\partial x_i}\,dx+\int\limits_{\Omega}\sum_{i,j,k=1}^{n}v_k(t)\frac{\partial\mathcal{E}_{ij}(v)(t)}{\partial x_k}\frac{\partial v_i(t)}{\partial x_j}\,dx\right)=$$

$$=\int\limits_{\Omega}\sum_{i,j,k=1}^{n}v_k(t)\frac{\partial\mathcal{E}_{ij}(v)(t)}{\partial x_k}\mathcal{E}_{ij}(v)(t)dx=\int\limits_{\Omega}\sum_{i,j,k=1}^{n}v_k(t)\frac{\partial\left(\mathcal{E}_{ij}(v)(t)\mathcal{E}_{ij}(v)(t)\right)}{\partial x_k}\,dx=$$

$$=-\int\limits_{\Omega}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial v_k(t)}{\partial x_k}\sum_{i,j=1}^{n}\mathcal{E}_{ij}(v)(t)\mathcal{E}_{ij}(v)(t)dx=$$

$$=-\int\limits_{\Omega}\operatorname{div}\,v(t)\sum_{i,j=1}^{n}\mathcal{E}_{ij}(v)(t)\mathcal{E}_{ij}(v)(t)dx=0.$$

Здесь мы воспользовались соотношением

$$\int\limits_{\Omega}\sum_{i,j,k=1}^{n}v_k(t)\frac{\partial\mathcal{E}_{ij}(v)(t)}{\partial x_k}\frac{\partial v_j(t)}{\partial x_i}\,dx=\int\limits_{\Omega}\sum_{i,j,k=1}^{n}v_k(t)\frac{\partial\mathcal{E}_{ij}(v)(t)}{\partial x_k}\frac{\partial v_i(t)}{\partial x_j}\,dx,$$

которое имеет место в силу симметричности тензора скоростей деформаций $\mathcal{E}$.

Таким образом (1.2.29) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{V^0}+\frac{\varepsilon}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{V^3}+\frac{\varkappa}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{V^1}+\lambda\nu\|v(t)\|^2_{V^1}=\lambda\langle f(t),v(t)\rangle.$$

Так как правую часть последнего равенства можно оценить сверху

$$\lambda\langle f(t),v(t)\rangle\leqslant\lambda\left|\langle f(t),v(t)\rangle\right|\leqslant\lambda\|f(t)\|_{V^{-1}}\|v(t)\|_{V^1}\leqslant\|f(t)\|_{V^{-1}}\|v(t)\|_{V^1},$$

а левая часть оценивается снизу

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{V^0}+\frac{\varepsilon}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{V^3}+\frac{\varkappa}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{V^1}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{V^0}+\frac{\varepsilon}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{V^3}+\frac{\varkappa}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{V^1}+\lambda\nu\|v(t)\|^2_{V^1},$$

то в итоге при почти всех $t \in (0,T)$ получим, что

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{V^0} + \frac{\varepsilon}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{V^3} + \frac{\varkappa}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{V^1} \leqslant \|f(t)\|_{V^{-1}}\|v(t)\|_{V^1}.$$

Проинтегрируем последнее неравенство по t от 0 до τ, где $\tau \in [0,T]$. В силу того, что v удовлетворяет начальному условию $v(0) = v_0$, получим

$$\frac{1}{2}\|v(\tau)\|^2_{V^0} - \frac{\lambda^2}{2}\|v_0\|^2_{V^0} + \frac{\varepsilon}{2}\|v(\tau)\|^2_{V^3} - \frac{\varepsilon\lambda^2}{2}\|v_0\|^2_{V^3} + \frac{\varkappa}{2}\|v(\tau)\|^2_{V^1} - \frac{\varkappa\lambda^2}{2}\|v_0\|^2_{V^1} \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_0^\tau \|f(t)\|_{V^{-1}}\|v(t)\|_{V^1}\,dt.$$

Правую часть последнего неравенства можно оценить следующим образом

$$\int\limits_0^\tau \|f(t)\|_{V^{-1}}\|v(t)\|_{V^1}\,dt \leqslant \max_{t\in[0,\tau]}\|v(t)\|_{V^1}\int\limits_0^\tau \|f(t)\|_{V^{-1}}dt \leqslant$$

$$\leqslant \max_{t\in[0,T]}\|v(t)\|_{V^1}\int\limits_0^T \|f(t)\|_{V^{-1}}dt \leqslant \sqrt{T}\max_{t\in[0,T]}\|v(t)\|_{V^1}\Big(\int\limits_0^T \|f(t)\|^2_{V^{-1}}dt\Big)^{\frac{1}{2}} =$$
$$= \sqrt{T}\|v\|_{C([0,T],V^1)}\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} \leqslant \frac{\varkappa}{4}\|v\|^2_{C([0,T],V^1)} + \frac{T}{\varkappa}\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})}.$$

Здесь мы воспользовались неравенством Гёльдера и неравенством Коши:

$$bc \leqslant \frac{\delta b^2}{2} + \frac{c^2}{2\delta}$$

для $\delta = \frac{\varkappa}{2}$.

Таким образом получили

$$\frac{1}{2}\|v(\tau)\|^2_{V^0} + \frac{\varepsilon}{2}\|v(\tau)\|^2_{V^3} + \frac{\varkappa}{2}\|v(\tau)\|^2_{V^1} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{T}{\varkappa}\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} + \frac{\varkappa}{4}\|v\|^2_{C([0,T],V^1)} + \frac{1}{2}\|v_0\|^2_{V^0} + \frac{\varepsilon}{2}\|v_0\|^2_{V^3} + \frac{\varkappa}{2}\|v_0\|^2_{V^1}.$$

Из того, что

$$\frac{1}{2}\|v(\tau)\|^2_{V^0} \geqslant 0,$$

следует, что

$$\frac{\varepsilon}{2}\|v(\tau)\|^2_{V^3}+\frac{\varkappa}{2}\|v(\tau)\|^2_{V^1}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{T}{\varkappa}\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})}+\frac{\varkappa}{4}\|v\|^2_{C([0,T],V^1)}+\frac{1}{2}\|v_0\|^2_{V^0}+\frac{\varepsilon}{2}\|v_0\|^2_{V^3}+\frac{\varkappa}{2}\|v_0\|^2_{V^1}.$$

Откуда, аналогично, в силу положительной определенности $\|v(\tau)\|^2_{V^3}$ и $\|v(\tau)\|^2_{V^1}$, получим следующие две оценки:

$$\frac{\varepsilon}{2}\|v(\tau)\|^2_{V^3}\leqslant\frac{T}{\varkappa}\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})}+\frac{\varkappa}{4}\|v\|^2_{C([0,T],V^1)}+\frac{1}{2}\|v_0\|^2_{V^0}+\frac{\varepsilon}{2}\|v_0\|^2_{V^3}+\frac{\varkappa}{2}\|v_0\|^2_{V^1};$$
$$\frac{\varkappa}{2}\|v(\tau)\|^2_{V^1}\leqslant\frac{T}{\varkappa}\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})}+\frac{\varkappa}{4}\|v\|^2_{C([0,T],V^1)}+\frac{1}{2}\|v_0\|^2_{V^0}+\frac{\varepsilon}{2}\|v_0\|^2_{V^3}+\frac{\varkappa}{2}\|v_0\|^2_{V^1}.$$

Правая часть в обоих последних неравенствах не зависит от τ. Следовательно, в каждом из них можно перейти к максимуму по $\tau\in[0,T]$ в левой части:

$$\frac{\varepsilon}{2}\|v\|^2_{C([0,T],V^3)}\leqslant\frac{T}{\varkappa}\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})}+\frac{\varkappa}{4}\|v\|^2_{C([0,T],V^1)}+\frac{1}{2}\|v_0\|^2_{V^0}+$$
$$+\frac{\varepsilon}{2}\|v_0\|^2_{V^3}+\frac{\varkappa}{2}\|v_0\|^2_{V^1}; \quad (1.2.30)$$

$$\frac{\varkappa}{2}\|v\|^2_{C([0,T],V^1)}\leqslant\frac{T}{\varkappa}\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})}+\frac{\varkappa}{4}\|v\|^2_{C([0,T],V^1)}+\frac{1}{2}\|v_0\|^2_{V^0}+$$
$$+\frac{\varepsilon}{2}\|v_0\|^2_{V^3}+\frac{\varkappa}{2}\|v_0\|^2_{V^1}. \quad (1.2.31)$$

Тогда из (1.2.31) непосредственно получаем (1.2.27). Для получения оценки (1.2.26) достаточно сложить неравенства (1.2.30) и (1.2.31). □

Теорема 1.2.4. *Если $v\in E_2$ — решение операторного уравнения* (1.2.25) *для некоторого $\lambda\in[0,1]$, то для него имеет место следующии оценка:*

$$\varepsilon\|v'\|_{L_2(0,T;V^3)}\leqslant C_{24}, \quad (1.2.32)$$
$$\|v'\|_{L_2(0,T;V^{-1})}\leqslant\frac{2C_{24}}{C_4}, \quad (1.2.33)$$

где постоянная

$$C_{24}=C_{25}\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}+(C_{26}+2\varkappa C_{27})\left(\frac{C_{23}+2\varepsilon\|v_0\|^2_{V^3}}{\varkappa}\right)+$$
$$\nu C_1\sqrt{\frac{C_{23}+2\varepsilon\|v_0\|^2_{V^3}}{\varkappa}}.$$

Доказательство. Пусть $v \in E_2$ — решение (1.2.25), тогда оно удовлетворяет следующему операторному уравнению

$$v' + \varepsilon N v' + \varkappa A v' - \lambda B_1(v) + \lambda \nu A v - \lambda \varkappa B_2(v) - \lambda \varkappa B_3(v) + 2\lambda \varkappa D = \lambda f. \quad (1.2.34)$$

Следовательно:

$$\|v' + \varepsilon N v' + \varkappa A v'\|_{L_2(0,T;V^{-3})} =$$
$$= \|\lambda f + \lambda B_1(v) - \lambda \nu A v + \lambda \varkappa B_2(v) + \lambda \varkappa B_3(v) - 2\lambda \varkappa D\|_{L_2(0,T;V^{-3})}.$$

Правую часть последнего равенства, можно оценить следующим образом (напомним, что $\lambda \leqslant 1$):

$$\|\lambda f + \lambda B_1(v) - \lambda \nu A v + \lambda \varkappa B_2(v) + \lambda \varkappa B_3(v) - 2\lambda \varkappa D\|_{L_2(0,T;V^{-3})} \leqslant$$
$$\leqslant \lambda \|f\|_{L_2(0,T;V^{-3})} + \lambda \|B_1(v)\|_{L_2(0,T;V^{-3})} + \lambda \nu \|Av\|_{L_2(0,T;V^{-3})} +$$
$$+ \lambda \varkappa \|B_2(v)\|_{L_2(0,T;V^{-3})} + \lambda \varkappa \|B_3(v)\|_{L_2(0,T;V^{-3})} + 2\lambda \varkappa \|D(v)\|_{L_2(0,T;V^{-3})} \leqslant$$
$$\leq \|f\|_{L_2(0,T;V^{-3})} + \|B_1(v)\|_{L_2(0,T;V^{-3})} + \nu \|Av\|_{L_2(0,T;V^{-3})} +$$
$$+ \varkappa \|B_2(v)\|_{L_2(0,T;V^{-3})} + \varkappa \|B_3(v)\|_{L_2(0,T;V^{-3})} + 2\varkappa \|D(v)\|_{L_2(0,T;V^{-3})} \leqslant$$

откуда в силу непрерывного вложения $L_2(0,T;V^{-1})$ в $L_2(0,T;V^{-3})$ и оценок (1.2.13),(1.2.17), (1.2.18), (1.2.21)

$$\leqslant C_{25} \|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + C_{26} \|v\|^2_{C([0,T],V^1)} + \nu C_1 \|v\|_{C([0,T],V^1)} + 2\varkappa C_{27} \|v\|^2_{C([0,T],V^1)} +$$
$$+ C_4 \|v\|^2_{C([0,T],V^1)} = C_{25} \|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + (C_{26} + 2\varkappa C_{27}) \|v\|^2_{C([0,T],V^1)} +$$
$$+ \nu C_1 \|v\|_{C([0,T],V^1)} \leqslant$$

в силу априорной оценки (1.2.27)

$$\leqslant C_{25} \|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + (C_{26} + 2\varkappa C_{27}) \left(\frac{C_{23} + 2\varepsilon \|v_0\|^2_{V^3}}{\varkappa} \right) +$$
$$+ \nu C_1 \sqrt{\frac{C_{23} + 2\varepsilon \|v_0\|^2_{V^3}}{\varkappa}}.$$

Воспользовавшись теперь оценкой (1.2.15) на левую часть (1.2.3):

$$\varepsilon \|v'\|_{L_2(0,T;V^3)} \leqslant \|v' + \varepsilon N v' + \varkappa A v'\|_{L_2(0,T;V^{-3})}$$

мы и получим требуемое неравенство (1.2.32).

Оценка (1.2.33) получается следующим образом. Как и ранее v удовлетворяет уравнению (1.2.34), следовательно

$$\|v' + \varkappa Av'\|_{L_2(0,T;V^{-3})} =$$
$$= \| - \varepsilon Nv' + \lambda f + \lambda B_1(v) - \lambda\nu Av + \lambda\varkappa B_2(v) + \lambda\varkappa B_3(v) -$$
$$-2\lambda\varkappa D(v)\|_{L_2(0,T;V^{-3})} \leqslant \varepsilon\|Nv'\|_{L_2(0,T;V^{-3})} + \|\lambda f + \lambda B_1(v) - \lambda\nu Av + \lambda\varkappa B_2(v) +$$
$$+\lambda\varkappa B_3(v) - 2\lambda\varkappa D(v)\|_{L_2(0,T;V^{-3})} \leqslant$$

аналогично проделанным выше оценкам и воспользовавшись также неравенствами (1.2.14) и (1.2.32)

$$\leqslant \varepsilon\|v'\|_{L_2(0,T;V^3)} + C_{24} \leqslant 2C_{24}.$$

Таким образом нами получена оценка

$$\|v' + \varkappa Av'\|_{L_2(0,T;V^{-3})} \leqslant 2C_{24}.$$

Из этого неравенства и из оценки (1.2.16):

$$C_4\|v'\|_{L_2(0,T;V^{-1})} \leqslant \|(J + \varkappa A)v'\|_{L_2(0,T;V^{-3})}$$

и получается (1.2.33). □

Из теорем 1.2.3 и 1.2.4 непосредственно получаем следствие:

Следствие 1.2.1. *Если v — решение операторного уравнения* (1.2.25) *для некоторого $\lambda \in [0,1]$, то для него имеют место следующая оценка:*

$$\|v\|_{E_2} \leqslant C_{28} = \sqrt{\frac{C_{23}}{\varepsilon} + 2\|v_0\|^2_{V^3}} + \frac{C_{24}}{\varepsilon}. \qquad (1.2.35)$$

1.2.4 Теорема существования решения аппроксимационной задачи

Теорема 1.2.5. *Операторное уравнение* (1.2.12) *имеет хотя бы одно решение $v \in E_2$.*

Доказательство. Для доказательства данной теоремы воспользуемся теорией топологической степени Лере–Шаудера для вполне непрерывных векторных полей.

В силу априорной оценки (1.2.35) все решения семейства уравнений (1.2.25):

$$L(v) + \lambda K(v) = \lambda(f, v_0), \quad \text{где} \quad \lambda \in [0,1],$$

лежат в шаре $B_R \subset E_2$ радиуса $R = C_{28} + 1$ с центром в нуле. И, следовательно, все решения семейства уравнений

$$v - \lambda L^{-1}\left[-K(v) + (f, v_0)\right] = 0, \quad \text{где} \quad \lambda \in [0,1],$$

лежат в том же шаре B_R.

В силу второго пункта леммы 1.2.5 отображение $[-K(\cdot) + (f, v_0)] : E_2 \to L_2(0, T; V^{-3}) \times V^3$ является компактным.

В силу первого пункта той же леммы оператор $L^{-1} : L_2(0, T; V^{-3}) \times V^3 \to E_2$ непрерывен.

Таким образом отображение $L^{-1}\left[-K(\cdot) + (f, v_0)\right] : E_2 \to E_2$ компактно. Тогда отображение

$$G : [0,1] \times E_2 \to E_2, \quad G(\lambda, v) = \lambda L^{-1}\left[-K(v) + (f, v_0)\right]$$

компактно по совокупности переменных λ и v.

Из вышесказанного получаем, что компактное векторное поле $\Phi(\lambda, v) = v - G(\lambda, v)$ невырождено на границе шара B_R. Следовательно, для него определена топологическая степень Лере–Шаудера $\deg_{LS}(\Phi, B_R, 0)$. По свойству гомотопической инвариантности степени получим, что

$$\deg_{LS}(\Phi(0, \cdot), B_R, 0) = \deg_{LS}(\Phi(1, \cdot), B_R, 0).$$

Вспомним, что $\Phi(0, \cdot) = I$ и по условию нормировки:

$$\deg_{LS}(I, B_R, 0) = 1.$$

Отсюда,

$$\deg_{LS}(\Phi(1, \cdot), B_R, 0) = 1.$$

Таким образом получили, что существует хотя бы одно решение $v \in E_2$ уравнения

$$v - L^{-1}\left[-K(v) + (f, v_0)\right] = 0$$

и, следовательно, операторного уравнения (1.2.12). □

Поскольку существует решение $v \in E_2$ операторного уравнения (1.2.12), то из вышеприведенных рассуждений следует, то аппроксимационная задача имеет хотя бы одно решение $v \in E_2$.

1.2.5 Доказательство теоремы 1.2.1

Доказательство. Поскольку, пространство V^3 плотно в V^1, то для каждого $v_0 \in V^1$ существует последовательность $v_0^m \in V^3$, сходящаяся к v_0 в V^1. Если $v_0 \equiv 0$, то положим

$$v_0^m \equiv 0, \quad \varepsilon^m = \frac{1}{m}.$$

Если же $\|v_0\|_{V^1} \neq 0$, то начиная с некоторого номера $\|v_0^m\|_{V^3} \neq 0$. Тогда положим

$$\varepsilon^m = \frac{1}{m\|v_0^m\|^2_{V^3}}.$$

В силу нашего выбора полученная последовательность $\{\varepsilon^m\}$ сходится к нулю при $m \to +\infty$. Причём имеет место неравенство

$$\varepsilon^m \|v_0^m\|^2_{V^3} \leqslant 1. \tag{1.2.36}$$

В силу теоремы 1.2.5 при каждом ε^m и v_0^m существует $v^m \in E_2 \subset E_1$ — решение аппроксимационной задачи. Таким образом каждое v^m удовлетворяет для всех $\varphi \in V^3$ при почти всех $t \in (0,T)$ равенству (1.2.10). Умножив скалярно в $L_2(0,T)$ равенство (1.2.10) на бесконечно дифференцируемую функцию $\psi(t)$ такую, что $\psi(0) = \psi(T) = 0$ и проинтегрировав по частям, получим

$$-\int_0^T \int_\Omega v^m \varphi \psi' \, dx \, dt - \int_0^T \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n (\Delta_\alpha^{-1} v^m)_i (v^m)_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \psi \, dx \, dt +$$

$$+\nu \int_0^T \int_\Omega \nabla v^m : \nabla \varphi \psi \, dx \, dt - \varepsilon^m \int_0^T \int_\Omega \nabla \left(\Delta v^m\right) : \nabla \left(\Delta \varphi\right) \psi' \, dx \, dt -$$

$$-\varkappa \int_0^T \int_\Omega \nabla v^m : \nabla \varphi \psi' \, dx \, dt - \varkappa \int_0^T \int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n (v^m)_k \frac{\partial (v^m)_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} \psi \, dx \, dt -$$

$$-\varkappa \int_0^T \int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n (v^m)_k \frac{\partial (v^m)_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} \psi \, dx \, dt +$$

$$+2\varkappa\int\limits_0^T\int\limits_\Omega(\mathcal{E}(v^m)W_\rho(v^m)-W_\rho(v^m)\mathcal{E}(v^m)):\nabla\varphi\psi\,dx\,dt=\int\limits_0^T\int\limits_\Omega f\varphi\psi\,dx\,dt. \tag{1.2.37}$$

и начальному условию:

$$v^m\Big|_{t=0}(x)=v_0^m(x),\quad x\in\Omega. \tag{1.2.38}$$

Так как последовательность $\{v_0^m\}$ сходится в V^1, то она ограничена по норме V^1. Следовательно,

$$2\|v_0^m\|^2_{V^0}+2\varkappa\|v_0^m\|^2_{V^1}\leqslant C_{29}, \tag{1.2.39}$$

где C_{29} — постоянная, не зависящая от m.

Вспоминая определение констант в априорных оценках, отметим, что постоянная C_{23} из неравенства (1.2.27) на самом деле зависит от $m:$

$$C_{23}=\frac{4T}{\varkappa}\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})}+2\|v_0^m\|^2_{V^0}+2\varkappa\|v_0^m\|^2_{V^1}.$$

Однако, воспользовавшись (1.2.39), её можно оценить сверху следующим образом:

$$C_{23}\leqslant\frac{4T}{\varkappa}\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})}+C_{29}=C_{30}. \tag{1.2.40}$$

Таким образом, в силу неравенств (1.2.36) и (1.2.40) из оценки (1.2.27) получаем, что

$$\varkappa\|v^m\|^2_{C([0,T],V^1)}\leqslant C_{31}+2. \tag{1.2.41}$$

Аналогично, воспользовавшись неравенствами (1.2.36) и (1.2.40), получим из оценок (1.2.32) и (1.2.33):

$$\begin{gathered}\varepsilon\|(v^m)'\|_{L_2(0,T;V^3)}\leqslant C_{25}\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}+\\+(C_{26}+2\varkappa C_{27})\left(\frac{C_{30}+2}{\varkappa}\right)+\nu C_1\sqrt{\frac{C_{30}+2}{\varkappa}},\end{gathered} \tag{1.2.42}$$

$$\begin{gathered}\|(v^m)'\|_{L_2(0,T;V^{-1})}\leqslant\frac{2C_{25}}{C_4}\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}+\\+2\left(C_{26}+2\varkappa C_{27}\right)\left(\frac{C_{30}+2}{\varkappa C_4}\right)+\frac{2\nu C_1}{C_4}\sqrt{\frac{C_{30}+2}{\varkappa}}.\end{gathered} \tag{1.2.43}$$

В силу непрерывности вложений

$$C([0,T],V^1)\subset L_2(0,T;V^1) \quad \text{и} \quad C([0,T],V^1)\subset L_\infty(0,T;V^1)$$

и оценок (1.2.41) и (1.2.43), без ограничения общности (в случае необходимости переходя к подпоследовательности) получим, что

$$v^m \rightharpoonup v_* \quad \text{слабо в } L_2(0,T;V^1) \quad \text{при } m\to+\infty;$$
$$v^m \rightharpoonup v_* \quad \text{*-слабо в } L_\infty(0,T;V^1) \quad \text{при } m\to+\infty;$$
$$(v^m)' \rightharpoonup v_*' \quad \text{слабо в } L_2(0,T;V^{-1}) \quad \text{при } m\to+\infty.$$

Тогда при $m\to+\infty$ в силу определения слабой сходимости

$$\nu\int_0^T\int_\Omega \nabla v^m:\nabla\varphi\psi\,dx\,dt\to\nu\int_0^T\int_\Omega \nabla v_*:\nabla\varphi\psi\,dx\,dt.$$

Поскольку линейный оператор переводит слабо сходящуюся последовательность в слабо сходящуюся, то при $m\to+\infty$ получим что

$$-\int_0^T\int_\Omega v^m\varphi\psi'\,dx\,dt-\varkappa\int_0^T\int_\Omega\nabla v^m:\nabla\varphi\psi'\,dx\,dt=\langle\langle(J+\varkappa A)(v^m)',\varphi\rangle,\psi\rangle\to$$
$$\to\langle\langle(J+\varkappa A)v_*',\varphi\rangle,\psi\rangle=-\int_0^T\int_\Omega v_*\varphi\psi'\,dx\,dt-\varkappa\int_0^T\int_\Omega\nabla v_*:\nabla\varphi\psi'\,dx\,dt.$$

Далее, используя оценку (1.2.42), как и выше, без ограничения общности и в случае необходимости переходя к подпоследовательности, мы имеем, что существует функция $u\in L_2(0,T;V^3)$, такая что

$$\varepsilon^m(v^m)'\rightharpoonup u \quad \text{слабо в } L_2(0,T;V^3) \quad \text{при } m\to+\infty.$$

Итак, при $m\to+\infty$ мы имеем

$$\varepsilon^m\int_0^T\int_\Omega\nabla\left(\Delta(v^m)'\right):\nabla\left(\Delta\varphi\right)\psi\,dx\,dt\to\int_0^T\int_\Omega\nabla\left(\Delta u\right):\nabla\left(\Delta\varphi\right)\psi\,dx\,dt.$$

Однако, последовательность $\varepsilon^m(v^m)'$ сходится к нулю в смысле распределений на отрезке $[0,T]$ со значениями в V^{-5}. На самом деле, для любых

$\psi \in \mathfrak{D}([0,T]), \varphi \in V^5$, используя формулу интегрирования по частям, мы получим

$$\lim_{m\to\infty}\left|\varepsilon^m \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \nabla\left(\Delta(v^m)'(t)\right) : \nabla\left(\Delta\varphi\right)\, dx\psi(t)dt\right| =$$

$$= \lim_{m\to\infty}\varepsilon^m \left|\int\limits_0^T \int\limits_\Omega \Delta(v^m)'(t)\Delta^2\varphi\, dx\psi(t)dt\right| =$$

$$= \lim_{m\to\infty}\varepsilon^m \left|\int\limits_0^T \int\limits_\Omega \nabla\left((v^m)'(t)\right) : \nabla\left(\Delta^2\varphi\right)\, dx\psi(t)dt\right| =$$

$$= \lim_{m\to\infty}\varepsilon^m \lim_{m\to\infty}\left|\int\limits_0^T \int\limits_\Omega \nabla\left((v^m)'(t)\right) : \nabla\left(\Delta^2\varphi\right)\, dx\psi(t)dt\right| =$$

$$= \lim_{m\to\infty}\varepsilon^m \lim_{m\to\infty}\left|\int\limits_\Omega \left(\int\limits_0^T \nabla\left((v^m)'(t)\right)\psi(t)dt\right) : \nabla\left(\Delta^2\varphi\right)\, dx\right| =$$

$$= \lim_{m\to\infty}\varepsilon^m \lim_{m\to\infty}\left|\int\limits_\Omega \left(\int\limits_0^T \nabla v^m(t)\frac{\partial\psi(t)}{\partial t}dt\right) : \nabla\left(\Delta^2\varphi\right)\, dx\right| =$$

$$= \lim_{m\to\infty}\varepsilon^m \lim_{m\to\infty}\left|\int\limits_0^T \int\limits_\Omega \nabla v^m(t) : \nabla\left(\Delta^2\varphi\right)\, dx\frac{\partial\psi(t)}{\partial t}dt\right| =$$

так как v^m слабо сходится в $L_2(0,T;V^1)$ к v_*, и, следовательно, сходится к v_* и в смысле распределений, то

$$= \left|\int\limits_0^T \int\limits_\Omega \nabla v_*(t) : \nabla\left(\Delta^2\varphi\right)\, dx\frac{\partial\psi(t)}{\partial t}dt\right| \lim_{m\to\infty}\varepsilon^m = 0.$$

Таким образом в силу единственности слабого предела

$$\varepsilon^m \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \nabla\left(\Delta(v^m)'\right) : \nabla\left(\Delta\varphi\right)\psi\, dx\, dt \to 0 \quad \text{при } m \to +\infty.$$

Воспользовавшись теоремой 1.1.5 получим вполне непрерывное вложение

$$F = \{v : v \in C([0,T], V^1); v' \in L_2(0,T;V^{-1})\} \subset C([0,T], L_4(\Omega)).$$

Отсюда, учитывая оценки (1.2.41) и (1.2.43), получаем, что

$$v^m \to v_*, \quad \text{сильно в } C([0,T], L_4(\Omega)) \quad \text{при } m \to +\infty. \tag{1.2.44}$$

В силу того, что оператор $\Delta_\alpha^{-1} = (I - \alpha^2\Delta)^{-1} : L_2(0,T;V^1) \to L_2(0,T;V^3)$ является непрерывным, то

$$\int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n (\Delta_\alpha^{-1} v^m)_i (v^m)_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\,dx \to \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n (\Delta_\alpha^{-1} v_*)_i (v_*)_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\,dx \quad \text{при} \quad m \to \infty,$$

где первая последовательность $(\Delta_\alpha^{-1} v^m)_i$ слабо сходится в $L_2(0,T;V^1)$, а вторая $(v^m)_j$ — сильно в $L_2(0,T;L_4(\Omega))$. Следовательно, их произведение сходится слабо к произведению пределов.

В следующих интегралах имеем

$$\varkappa \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n (v^m)_k \frac{\partial (v^m)_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} \psi\,dx\,dt \to$$

$$\to \varkappa \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n (v_*)_k \frac{\partial (v_*)_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} \psi\,dx\,dt;$$

$$\varkappa \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n (v^m)_k \frac{\partial (v^m)_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} \psi\,dx\,dt \to$$

$$\to \varkappa \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n (v_*)_k \frac{\partial (v_*)_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} \psi\,dx\,dt.$$

Действительно, здесь последовательность v^m сходится к v_* сильно в $C([0,T], L_4(\Omega))$, а $\nabla(v^m)$ сходится к ∇v_* слабо в $L_4(0,T;L_2(\Omega))$. Следовательно, их произведение сходится слабо к произведению пределов.

Осталось доказать предельный переход в последнем слагаемом равенства (1.2.37).

$$\int\limits_0^T \int\limits_\Omega (\mathcal{E}(v^m) W_\rho(v^m) - \mathcal{E}(v_*) W_\rho(v_*)) : \nabla\varphi\psi\,dx\,dt =$$

$$= \int\limits_0^T \int\limits_\Omega (\mathcal{E}(v^m)(W_\rho(v^m) - W_\rho(v_*)) + (\mathcal{E}(v^m) - \mathcal{E}(v_*)) W_\rho(v_*)) : \nabla\varphi\psi\,dx\,dt \leq$$

$$\leq \|\mathcal{E}(v^m)\|_{C([0,T],L_2(\Omega))}\|\nabla\varphi\|_{L_2(\Omega)}\|\psi\|_{C([0,T])}\int\limits_0^T \|W_\rho(v^m-v_*)\|_{L_\infty(\Omega)}\,dt+$$

$$+\|W_\rho(v_*)\|_{C([0,T],L_\infty(\Omega))}\int\limits_0^T \mathcal{E}(v^m-v_*):\nabla\varphi\psi\,dt\leq$$

$$\leq C_{32}\Big(\|\mathcal{E}(v^m)\|_{C([0,T],L_2(\Omega))}\|\nabla\varphi\|_{L_2(\Omega)}\|\psi\|_{C([0,T])}\int\limits_0^T \|(v^m-v_*)\|_{L_2(\Omega)}\,dt+$$

$$+\|W_\rho(v_*)\|_{C([0,T],L_\infty(\Omega))}\int\limits_0^T \mathcal{E}(v^m-v_*):\nabla\varphi\psi\,dt\Big)\leq$$

$$\leq C_{33}\Big(\|\mathcal{E}(v^m)\|_{C([0,T],L_2(\Omega))}\|\nabla\varphi\|_{L_2(\Omega)}\|\psi\|_{C([0,T])}\int\limits_0^T \|(v^m-v_*)\|_{L_4(\Omega)}\,dt+$$

$$+\|W_\rho(v_*)\|_{C([0,T],L_\infty(\Omega))}\int\limits_0^T \mathcal{E}(v^m-v_*):\nabla\varphi\psi\,dt\Big).$$

Вспомним, что последовательность v^m сходится к v_* сильно в $C([0,T],L_4(\Omega))$, а $\nabla(v^m)$ сходится к ∇v_* слабо в $L_4(0,T;L_2(\Omega))$. Следовательно мы доказали, что при $m\to+\infty$

$$\int\limits_0^T\int\limits_\Omega \mathcal{E}(v^m)W_\rho(v^m):\nabla\varphi\psi\,dx\,dt\to\int\limits_0^T\int\limits_\Omega \mathcal{E}(v_*)W_\rho(v_*):\nabla\varphi\psi\,dx\,dt.$$

Для второй части используем тот же метод:

$$\int\limits_0^T\int\limits_\Omega (W_\rho(v^m)\mathcal{E}(v^m)-W_\rho(v_*)\mathcal{E}(v_*)):\nabla\varphi\psi\,dx\,dt=$$

$$=\int\limits_0^T\int\limits_\Omega \Big(W_\rho(v^m)(\mathcal{E}(v^m)-\mathcal{E}(v_*))+(W_\rho(v^m)-W_\rho(v_*))\mathcal{E}(v_*)\Big):\nabla\varphi\psi\,dx\,dt\leq$$

$$\leq \|W_\rho(v^m)\|_{C([0,T],L_\infty(\Omega))}\int\limits_0^T\int\limits_\Omega |\mathcal{E}(v^m-v_*):\nabla\varphi\psi|\,dx\,dt+$$

$$+\|\mathcal{E}(v_*)\|_{C([0,T],L_2(\Omega))}\|\nabla\varphi\|_{L_2(\Omega)}\|\psi\|_{C([0,T])}\int\limits_0^T\|W_\rho(v^m-v_*)\|_{L_\infty(\Omega)}\,dt\leq$$

$$\leq C_{34}\Big(\|W_\rho(v^m)\|_{C([0,T],L_\infty(\Omega))}\int\limits_0^T\int\limits_\Omega|\mathcal{E}(v^m-v_*):\nabla\varphi\psi|\,dx\,dt+$$

$$+\|\mathcal{E}(v_*)\|_{C([0,T],L_2(\Omega))}\|\nabla\varphi\|_{L_2(\Omega)}\|\psi\|_{C([0,T])}\int\limits_0^T\|v^m-v_*\|_{L_2(\Omega)}\,dt\Big)\leq$$

$$\leq C_{35}\Big(\|W_\rho(v^m)\|_{C([0,T],L_\infty(\Omega))}\int\limits_0^T\int\limits_\Omega|\mathcal{E}(v^m-v_*):\nabla\varphi\psi|\,dx\,dt+$$

$$+\|\mathcal{E}(v_*)\|_{C([0,T],L_2(\Omega))}\|\nabla\varphi\|_{L_2(\Omega)}\|\psi\|_{C([0,T])}\int\limits_0^T\|v^m-v_*\|_{L_4(\Omega)}\,dt\Big).$$

В итоге получаем, что при $m\to+\infty$

$$\int\limits_0^T\int\limits_\Omega W_\rho(v^m)\mathcal{E}(v^m):\nabla\varphi\psi\,dx\,dt\to\int\limits_0^T\int\limits_\Omega W_\rho(v_*)\mathcal{E}(v_*):\nabla\varphi\psi\,dx\,dt.$$

Таким образом переходя в равенстве (1.2.37) к пределу при $m\to+\infty$ получим, что предельная функция v_* удовлетворяет следующему равенству:

$$-\int\limits_0^T\int\limits_\Omega v_*\varphi\psi'\,dx\,dt-\varkappa\int\limits_0^T\int\limits_\Omega\nabla v_*:\nabla\varphi\psi'\,dx\,dt-$$

$$-\int\limits_0^T\int\limits_\Omega\sum_{i,j=1}^n(\Delta_\alpha^{-1}v_*)_i(v_*)_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\psi\,dx\,dt+\nu\int\limits_0^T\int\limits_\Omega\nabla v_*:\nabla\varphi\psi\,dx\,dt-$$

$$-\varkappa\int\limits_0^T\int\limits_\Omega\sum_{i,j,k=1}^n(v_*)_k\frac{\partial(v_*)_i}{\partial x_j}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i\partial x_k}\psi\,dx\,dt-$$

$$-\varkappa\int\limits_0^T\int\limits_\Omega\sum_{i,j,k=1}^n(v_*)_k\frac{\partial(v_*)_j}{\partial x_i}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i\partial x_k}\psi\,dx\,dt+$$

$$+2\varkappa\int\limits_0^T\int\limits_\Omega(\mathcal{E}(v_*)W_\rho(v_*)-W_\rho(v_*)\mathcal{E}(v_*)):\nabla\varphi\psi\,dx\,dt=\int\limits_0^T\int\limits_\Omega f\varphi\psi\,dx\,dt.$$

Так как последнее равенство выполняется для произвольных функций $\psi \in C_0^\infty(0,T)$, функция v_* удовлетворяет соотношению (1.2.5) в смысле распределений на $(0,T)$. Заметим, в силу сильной сходимости (1.2.44) получаем, что v_m сходится к v_* поточечно на $[0,T]$. Отсюда, переходя в (1.2.38) к пределу при $m \to +\infty$ в силу выбора v_0^m имеем, что v_* удовлетворяет следующему начальному условию: $v_*|_{t=0} = v_0$. Так как для последовательности $\{v^m\}$ имеют место априорные оценки (1.2.41) и (1.2.43), то для v_* непосредственно получаем оценку:

$$\|v_*\|_{L_\infty(0,T;V^1)} + \|v_*'\|_{L_2(0,T;V^{-1})} \leqslant \frac{C_{30}+2}{\varkappa} + \frac{2C_{25}}{C_4}\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \\ + 2\left(C_{26} + 2\varkappa C_{27}\right)\left(\frac{C_{30}+2}{\varkappa C_4}\right) + \frac{2\nu C_1}{C_4}\sqrt{\frac{C_{30}+2}{\varkappa}}. \quad (1.2.45)$$

Отсюда получаем, что $v_* \in E_1$, что и завершает доказательство теоремы 1.2.1. $\square$

1.2.6 Доказательство теоремы 1.2.2

Для доказательства теоремы 1.2.2 рассмотрим отдельно второе слагаемое из равенства (1.2.5):

$$|\langle B(v^m), \varphi\rangle - \langle B(v^*), \varphi\rangle| = \left|\int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n u_i^m v_j^m \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\,dx - \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i^* v_j^* \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\,dx\right| \\ + \left|\int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n (v_i^m - v_i^*) v_j^m \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\,dx\right| + \left|\int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n (v_j^m - v_j^*) v_i^* \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\,dx\right|.$$

Отдельно оценим каждое слагаемое. Используя неравенство Гельдера, а также непрерывность вложения $V^1 \subset L_4(\Omega)$, для всех $\varphi \in V^2$, получим

$$\left|\int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n \alpha_m^2 \Delta u_i^m v_j^m \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\,dx\right| \leqslant \alpha_m \sum_{i,j=1}^n \Big(\int\limits_\Omega |\alpha_m \Delta u_i^m|^2\,dx\Big)^{\frac12} \Big(\int\limits_\Omega \Big|v_j^m \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\Big|^2\,dx\Big)^{\frac12} \leqslant \\ \leqslant \alpha_m \sum_{i,j=1}^n \|\alpha_m \Delta u_i^m\|_{L_2(\Omega)} \|v_j^m\|_{L_4(\Omega)} \left\|\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\right\|_{L_4(\Omega)} \leqslant \\ \leqslant C_{36}\alpha_m \sum_{i,j=1}^n \|\alpha_m \Delta u_i^m\|_{L_2(\Omega)} \|v_j^m\|_{V^1} \left\|\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\right\|_{V^1} \leqslant \\ \leqslant C_{37}\alpha_m \|\alpha_m \Delta u^m\|_{L_2(\Omega)} \|v^m\|_{V^1} \|\varphi\|_{V^2}.$$

Остальные слагаемые оцениваются аналогичным образом. Таким образом,

$$|\langle B(v^m),\varphi\rangle-\langle B(v^*),\varphi\rangle|\leqslant C_{38}(\alpha_m\|\alpha_m\Delta u^m\|_{L_2(\Omega)}\|v^m\|_{V^1}\|\varphi\|_{V^2}$$
$$+\|v^m-v^*\|_{L_4(\Omega)}\|v^m\|_{L_4(\Omega)}\|\varphi\|_{V^1}+\|v^m-v^*\|_{L_4(\Omega)}\|v^*\|_{L_4(\Omega)}\|\varphi\|_{V^1})$$
$$\leqslant C_{39}(\alpha_m\|\alpha_m\Delta u^m\|_{L_2(\Omega)}\|v^m\|_{V^1}+\|v^m-v^*\|_{L_4(\Omega)}\|v^m\|_{V^1}$$
$$+\|v^m-v^*\|_{L_4(\Omega)}\|v^*\|_{V^1})\|\varphi\|_{V^2}.$$

Следовательно,

$$\|B(v^m)-B(v^*)\|_{V^{-2}}\leqslant C_{39}(\alpha_m\|\alpha_m\Delta u^m\|_{L_2(\Omega)}\|v^m\|_{V^1}$$
$$+\|v^m-v^*\|_{L_4(\Omega)}\|v^m\|_{V^1}+\|v^m-v^*\|_{L_4(\Omega)}\|v^*\|_{V^1}).$$

Проинтегрируем обе части последнего неравенства по t в пределах от 0 до T. Применяя неравенство Гельдера, заключаем, что

$$\int\limits_0^T\|B(v^m)-B(v^*)\|_{V^{-2}}\,dt\leqslant\alpha_mC_{39}\int\limits_0^T\|\alpha_m\Delta u^m\|_{L_2(\Omega)}\|v^m\|_{V^1}\,dt$$
$$+C_{39}\int\limits_0^T\|v^m-v^*\|_{L_4(\Omega)}\|v^m\|_{V^1}\,dt+C_{39}\int\limits_0^T\|v^m-v^*\|_{L_4(\Omega)}\|v^*\|_{V^1}\,dt$$
$$\leqslant\alpha_mC_{39}\Big(\int_0^T\|\alpha_m\Delta u^m\|^2_{L_2(\Omega)}\,dt\Big)^{\frac12}\Big(\int\limits_0^T\|v^m\|^2_{V^1}\,dt\Big)^{\frac12}$$
$$+C_{39}\|v^m-v^*\|_{L_2(0,T;L_4(\Omega))}\|v^m\|_{L_2(0,T;V^1)}$$
$$+C_{39}\|v^m-v^*\|_{L_2(0,T;L_4(\Omega))}\|v^*\|_{L_2(0,T;V^1)}. \tag{1.2.46}$$

Так как $v^m\to v^*$ слабо в $L_2(0,T;V^1)$ и $(v^m)'\to(v^*)'$ слабо в $L_{4/3}(0,T;V^{-1})$, то в силу теоремы 1.1.5 последовательность $v^m\to v^*$ сильно в $L_2(0,T;L_4(\Omega))$. Таким образом, с учетом оценки (1.2.45) получаем, что последние два слагаемых в неравенстве (1.2.46) стремятся к нулю.

Напомним, что

$$\|v\|^2_{V^1}=\|u-\alpha^2\Delta u\|^2_{V^1}=\|u\|^2_{V^1}+2\|\alpha\Delta u\|^2_{L_2(\Omega)}+\alpha^4\|u\|^2_{V^3}.$$

Поэтому в силу оценки (1.2.45) следует, что

$$\int\limits_0^T\|\alpha\Delta u\|^2_{L_2(\Omega)}\,dt\leqslant\frac12\int\limits_0^T\|v\|^2_{V^1}\,dt\leqslant\frac{C_{40}}{2}(\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})}+1). \tag{1.2.47}$$

Таким образом, в силу неравенств (1.2.46) и (1.2.47), а также указанных сходимостей, получим

$$\int\limits_0^T \|B(v^m) - B(v^*)\|_{V^{-2}}\, dt \leqslant \alpha_m C_{39} \frac{C_{40}}{2} (\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} + 1) \to 0$$

при $\alpha_m \to 0$. Следовательно, $B(v^m) \to B(v^*)$ сильно в $L_1(0,T;V^{-2})$, а значит и в пространстве $\mathcal{D}'(0,T;V^{-2})$.

Для установления сходимостей в остальных слагаемых равенства (1.2.5) мы полностью повторим рассуждения, которые были проведены при доказательстве предельного перехода теоремы 1.2.1.

Таким образом, переходя в равенстве (1.2.5) к пределу при $\alpha \to 0$ получим, что предельная функция v^* удовлетворяет равенству

$$\frac{d}{dt}\int\limits_\Omega v^*\varphi\, dx - \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i^* v_j^* \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx + \nu \int\limits_\Omega \nabla v^* : \nabla\varphi\, dx + \varkappa \frac{d}{dt}\int\limits_\Omega \nabla v^* : \nabla \varphi\, dx -$$
$$-\varkappa \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k^* \frac{\partial v_i^*}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx - \varkappa \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k^* \frac{\partial v_j^*}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx +$$
$$+2\varkappa \int\limits_\Omega \big(\mathcal{E}(v^*) W_\rho(v^*) - W_\rho(v^*) \mathcal{E}(v^*)\big) : \nabla\varphi\, dx = \langle f, \varphi\rangle$$

Следовательно, v^* является слабым решением оригинальной начально–краевой задачи, что и завершает доказательство теоремы 1.2.2.

ГЛАВА 2
МОДЕЛИ С ТЕМПЕРАТУРОЙ

В данной главе рассматриваются математические модели, у которых вязкость ν зависит от температуры θ. В первых двух параграфах рассматривается модель Фойгта с температурой. Для данной модели доказывается слабая разрешимость и существование оптимального управления с обратной связью. В третьем и четвертом параграфах доказывается слабая разрешимость начально–краевых задач для модели Кельвина–Фойгта с температурой и для модели с реологическим соотношением, удовлетворяющим принципу объективности. В заключительных двух параграфах рассматривается альфа–модель Лере с температурой. Для данной модели также доказывается слабая разрешимость и существование оптимального управления с обратной связью.

2.1 Существование слабых решений термо–модели Фойгта

В данном параграфе рассматривается математическая модель Фойгта. А именно, изучается реологическое соотношение (3) с частной производной и с вязкостью ν зависит от температуры θ. Полученное соотношение подставляется в общее уравнение движения однородной несжимаемой среды с постоянной плотностью (1)–(2) и рассматривается в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, на отрезке времени $[0, T]$, $T > 0$:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - 2\mathrm{Div}\ (\nu(\theta)\mathcal{E}(v)) - \varkappa \frac{\partial \Delta v}{\partial t} + \mathrm{grad}\ p = f; \tag{2.1.1}$$

$$\mathrm{div}\ v = 0 \text{ в } Q_T; \qquad v|_{t=0} = v_0 \text{ в } \Omega; \qquad v|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0; \tag{2.1.2}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} - \chi \Delta\, \theta = 2\nu(\theta)\mathcal{E}(v) : \mathcal{E}(v) + 2\varkappa \frac{\partial \mathcal{E}(v)}{\partial t} : \mathcal{E}(v) + g; \tag{2.1.3}$$

$$\theta|_{t=0} = \theta_0 \text{ в } \Omega; \qquad \theta|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0. \tag{2.1.4}$$

Возникающее уравнение (2.1.3) — уравнения баланса энергии (см. [4]). Здесь θ — функция температуры, χ — коэффициент теплопроводности, g — источник внешнего тепла.

2.1.1 Постановка задачи

Для формулировки определения слабого решения введем необходимые функциональные пространства. Пространство $C([0,T],X)$ в данной пункте будет рассматриваться не только со стандартной нормой $\|v\|_{C([0,T],X)} = \max\limits_{t\in[0,T]} \|v(t)\|_X$, но и с эквивалентной ей нормой $\|v\|_{C([0,T],X),k} = \max\limits_{t\in[0,T]} (\exp\,(-kt)\|v(t)\|_X)$, $k \geq 0$. Эквивалентность норм следует из неравенства $\|v\|_{C([0,T],X),k} \leq \|v\|_{C([0,T],X)} \leq \exp\,(kT)\|v\|_{C([0,T],X),k}$. В данном пункте основными являются следующие функциональные пространства:

$E_1 = \{v : v \in C([0,T],V), v' \in L_2(0,T;V)\}$,

с нормой $\|v\|_{E_1} = \|v\|_{C([0,T],V)} + \|v'\|_{L_2(0,T;V)}$ и

$E_2 = \{v : v \in L_p(0,T;W_p^1(\Omega)), v' \in L_1(0,T;\, W_p^{-1}(\Omega)),\ 1 < p < +\infty\}$,

с нормой $\|v\|_{E_2} = \|v\|_{L_p(0,T,W_p^1(\Omega))} + \|v'\|_{L_1(0,T;W_p^{-1}(\Omega))}$.

Определение 2.1.1. *Слабым решением задачи* (2.1.1)–(2.1.4) *называется пара* (v,θ), *где* $v \in E_1$ *и* $\theta \in E_2$, *удовлетворяющая соотношениям*

$$\frac{d}{dt}\int\limits_\Omega v\,\varphi\,dx - \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\,dx + 2\int\limits_\Omega \nu(\theta)\mathcal{E}(v) : \mathcal{E}(\varphi)\,dx +$$

$$+\varkappa\frac{d}{dt}\int\limits_\Omega \mathcal{E}(v) : \mathcal{E}(\varphi)\,dx = \langle f(t), \varphi\rangle \quad \text{\textit{при всех} } \varphi \in V \text{ \textit{и п.в.} } t \in [0,T], \tag{2.1.5}$$

$$\frac{d}{dt}\int\limits_\Omega \theta\phi\,dx - \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i\theta_j \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i}\,dx + \chi\int\limits_\Omega \mathcal{E}(\theta) : \mathcal{E}(\phi)\,dx =$$

$$= 2\int\limits_\Omega \big(\nu(\theta)\mathcal{E}(v) : \mathcal{E}(v)\big) : \phi\,dx + 2\varkappa\int\limits_\Omega \big(\frac{\partial\mathcal{E}(v)}{\partial t} : \mathcal{E}(v)\big) : \phi\,dx +$$

$$+\langle g, \phi\rangle \quad \text{\textit{при всех} } \phi \in C_0^\infty(\Omega) \text{ \textit{и п.в.} } t \in [0,T], \tag{2.1.6}$$

и начальным условиям $v|_{t=0} = v_0$ *и* $\theta|_{t=0} = \theta_0$.

Замечание 2.1.1. *Задание начального условия для* θ *определено корректно в силу следующей теоремы (подробно описанной в [27], стр. 60), кото-*

рая является частным случаем общей интерполяционной теоремы Лионса–Madженеса:

Теорема 2.1.1. *Пусть X_0, X, X_1 — банаховы пространства, такие, что вложения $X_0 \subset X$, $X \subset X_1$ непрерывны, причем вложение $X_0 \subset X$ вполне непрерывно. Для $p_0 \geq 1$, $p_1 \geq 1$ имеет место вложение $W_{p_0,p_1} = \{v : v \in L_{p_0}(a,b;X_0), v' \in L_{p_1}(a,b;X_1)\} \subset C([a,b],X_1)$ и это вложение непрерывно.*

Основным результатом данного параграфа является следующая теорема:

Теорема 2.1.2. *Пусть функция $\nu(\theta) \in C^2(-\infty,+\infty)$ и $0 < \nu(\theta) \leq M$, $f \in L_2(0,T;V^*)$, $g \in L_1(0,T;L_1(\Omega))$, $v_0 \in V$, $\theta_0 \in W_p^{1-2/p}(\Omega)$. Тогда при $1 < p < 4/3$ для $n = 2$ и при $1 < p < 10/9$ для $n = 3$ существует слабое решение задачи* (2.1.1)–(2.1.4).

Данный результат был анонсирован в работе [22] и полностью доказан в работе [159]. Доказательство теоремы 2.1.2 проводится поэтапно. На первом этапе устанавливается разрешимость задачи (2.1.1)–(2.1.2) с известной $\theta \in E_2$. Затем устанавливается разрешимость задачи (2.1.3)–(2.1.4) с заданной $v \in E_1$. Далее, описывается итерационный процесс, состоящий в последовательном решении вышеприведенных задач, и, наконец, доказывается сходимость последовательных приближений к решению задачи (2.1.1)–(2.1.4).

2.1.2 Доказательство разрешимости начально–краевой задачи (2.1.1)–(2.1.2)

Рассмотрим начально–краевую задачу (2.1.1)–(2.1.2) при фиксированной $\theta \in E_2$. Слабое решение задачи (2.1.1)–(2.1.2) определим как функцию $v \in E_1$, удовлетворяющую (2.1.5) и начальному условию $v|_{t=0} = v_0$.

Теорема 2.1.3. *Пусть функция $\nu(\theta) \in C^2(-\infty,+\infty)$ и $0 < \nu(\theta) \leq M$, $f \in L_2(0,T;V^*)$, $v_0 \in V$, $\theta \in E_2$. Тогда задача* (2.1.1)–(2.1.2) *имеет по крайней мере одно слабое решение $v \in E_1$, для которого справедлива оценка*

$$\|v\|_{E_1} \leqslant R_1, \quad R_1 = R_1(T, \|f\|_{L_2(0,T;V^*)}, \|v_0\|_V). \tag{2.1.7}$$

Доказательство данной теоремы осуществляется на основе теории топологической степени Лере–Шаудера для вполне непрерывных векторных полей и приводится по следующей схеме: вначале дается операторная интерпретация рассматриваемой начально–краевой задачи. Далее, доказывается априорная оценка решений рассматриваемой задачи. В силу априорной оценки решений определена степень Лере–Шаудера для соответствующего вполне непрерывного векторного поля. На основе свойств топологической степени показывается, что операторное уравнение имеет по крайней мере одно решение. Следовательно, начально–краевая задача (2.1.1)–(2.1.2) имеет по крайней мере одно слабое решение $v \in E_1$. Перейдем непосредственно к доказательству теоремы 2.1.3.

Для доказательства данной теоремы перейдем к операторной трактовке рассматриваемой задачи.

Для доказательства данной теоремы перейдем к операторной трактовке рассматриваемой задачи. Введём операторы при помощи следующих равенств:

$$A : V \to V^*, \quad \langle Av, \varphi \rangle = \int\limits_\Omega \nabla v : \nabla \varphi \, dx, \quad v \in V, \, \varphi \in V;$$

$$B : L_4(\Omega) \to V^*, \quad \langle B(v), \varphi \rangle = \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \, dx, \quad v \in L_4(\Omega), \, \varphi \in V;$$

$$D : V \to V^*, \quad \langle Dv, \varphi \rangle = \int\limits_\Omega \nu(\theta)\mathcal{E}(v) : \nabla \varphi \, dx, \quad v \in V, \, \varphi \in V;$$

$$J : V \to V^*, \quad \langle Jv, \varphi \rangle = \int\limits_\Omega v \varphi \, dx \quad v \in V, \, \varphi \in V.$$

Так как мы используем операторную трактовку задачи (2.1.1)–(2.1.2), нам будет удобно рассматривать v и θ как функции переменной t со значениями в функциональных пространствах по переменной x и записывать $v(t)$ и $\theta(t)$ как v и θ, обозначая знаком " $'$ " производную по t.

Тогда (2.1.5) можно записать в следующем виде:

$$\langle Jv'(t), \varphi \rangle + \varkappa \langle Av'(t), \varphi \rangle + 2\langle Dv(t), \varphi \rangle - \langle B(v)(t), \varphi \rangle = \langle f(t), \varphi \rangle.$$

Поскольку в последнем равенстве функция $\varphi \in V$ произвольна, то оно эквивалентно следующему операторному уравнению:

$$(J + \varkappa A)v' + 2Dv - B(v) = f. \tag{2.1.8}$$

Итак, слабое решение задачи (2.1.1)–(2.1.2) — это решение $v \in E_1$ операторного уравнения (2.1.8), удовлетворяющее начальному условию $v|_{t=0} = v_0$.

Введём следующие обозначения:

$$L : E_1 \to L_2(0,T;V^*) \times V, \qquad L(v) = ((\varkappa A + J)v' + 2Dv, v|_{t=0});$$
$$K : E_1 \to L_2(0,T;V^*) \times V, \qquad K(v) = (B(v), 0).$$

Тогда рассматриваемая задача (2.1.1)–(2.1.2) эквивалентна следующему операторному уравнению:

$$L(v) - K(v) = (f, v_0). \tag{2.1.9}$$

Для того чтобы не нагромождать обозначения, будем использовать одну и ту же букву для обозначения операторов, действующих в разных функциональных пространствах и определяемых одной и той же формулой.

Лемма 2.1.1. *Для операторов A, $\varkappa A + J$, B имеют место следующие свойства:*

1. *Для любой $v \in L_2(0,T;V)$ функция $Av \in L_2(0,T;V^*)$ и оператор $A : L_2(0,T;V) \to L_2(0,T;V^*)$ — непрерывен, причём имеют место оценки:*

$$\|Av\|_{V^*} \leqslant \|v\|_V, \quad \|Av\|_{L_2(0,T;V^*)} \leqslant \|v\|_{L_2(0,T;V)}. \tag{2.1.10}$$

2. *Для любой $v \in L_2(0,T;V)$ функция $(\varkappa A + J)v \in L_2(0,T;V^*)$ и оператор $(\varkappa A + J) : L_2(0,T;V) \to L_2(0,T;V^*)$ непрерывен, обратим и для него имеют место оценки:*

$$\varkappa\|v\|_V \leqslant \|(\varkappa A + J)v\|_{V^*} \leqslant l_1\|v\|_V,$$
$$\varkappa\|v\|_{L_2(0,T;V)} \leqslant \|(\varkappa A + J)v\|_{L_2(0,T;V^*)} \leqslant l_1\|v\|_{L_2(0,T;V)}, \tag{2.1.11}$$

где l_1 — константа, зависящая от $\varkappa$. Обратный оператор $(\varkappa A + J)^{-1} : L_2(0,T;V^*) \to L_2(0,T;V)$ непрерывен и для него для любой $f \in L_2(0,T;V^*)$ имеют место оценки

$$\|(\varkappa A + J)^{-1} f\|_V \leqslant 1/\varkappa \|f\|_{V^*}; \tag{2.1.12}$$
$$\|(\varkappa A + J)^{-1} f\|_{L_2(0,T;V)} \leqslant 1/\varkappa \|f\|_{L_2(0,T;V^*)}. \tag{2.1.13}$$

3. Для любой $v \in E_1$ функция $B(v) \in L_2(0,T;V^*)$ и отображение $B : E_1 \to L_2(0,T;V^*)$ — вполне непрерывно и для него имеет место оценка:

$$\|B(v)\|_{L_2(0,T;V^*)} \leqslant C_1\|v\|^2_{C([0,T],V)}, \text{ где } C_1 = \mathrm{const}. \tag{2.1.14}$$

Доказательство последней леммы подробно приведено в [32].

Лемма 2.1.2. *Для оператора D имеют место следующие свойства:*

1. Оператор $D : V \to V^*$ — непрерывен и для него имеет место оценка:

$$\|Dv\|_{V^*} \leqslant C_2\|v\|_V. \tag{2.1.15}$$

2. Для любой $v \in L_2(0,T;V)$ функция $Dv \in L_2(0,T;V^*)$ и оператор $D : L_2(0,T;V) \to L_2(0,T;V^*)$ — непрерывен, причём имеет место оценка:

$$\|Dv\|_{L_2(0,T;V^*)} \leqslant C_2\|v\|_{L_2(0,T;V)}. \tag{2.1.16}$$

Доказательство. 1. В силу линейности оператора D для доказательства его непрерывности достаточно доказать его ограниченность. Так как ν гладкая ограниченная функция, а $\theta \in E_2$, то, очевидно, $\nu(\theta) \in L_\infty(Q_T)$ и $\|\nu(\theta)\|_{L_\infty(Q_T)} \leq C_2$. По определению оператора D для $v, \varphi \in V$ имеем

$$|\langle Dv, \varphi\rangle| = |\int\limits_\Omega \nu(\theta)\mathcal{E}(v) : \nabla\varphi dx| \leqslant C_2\|v\|_V\|\varphi\|_V,$$

и, следовательно: $\|Dv\|_{V^*} \leqslant C_2\|v\|_V$.

Таким образом оператор $D : V \to V^*$ ограничен и непрерывен.

2. Пусть $v \in L_2(0,T;V)$. В силу первого пункта данной леммы при почти всех $t \in (0,T)$ имеем оценку $\|Dv(t)\|_{V^*} \leqslant C_2\|v(t)\|_V$.

Возводя теперь последнюю оценку в квадрат и интегрируя по t от 0 до T, получим:

$$\int\limits_0^T \|Dv(t)\|^2_{V^*}\, dt \leqslant C_2^2 \int\limits_0^T \|v(t)\|^2_V\, dt.$$

Так как $\|v(t)\|_V \in L_2(0,T)$, то $\|Dv(t)\|_{V^*} \in L_2(0,T)$ и, следовательно, $Dv \in L_2(0,T;V^*)$. Из последней оценки следует требуемая оценка сверху:

$$\|Dv\|_{L_2(0,T;V^*)} \leqslant C_2\|v\|_{L_2(0,T;V)}.$$

Поскольку, оператор D — линеен и ограничен, то он непрерывен как оператор из $L_2(0,T;V)$ в $L_2(0,T;V^*)$, что и требовалось доказать. $\square$

Лемма 2.1.3. *Для операторов L и K имеют место следующие свойства:*

1. *Оператор $L : E_1 \to L_2(0,T;V^*) \times V$ обратим и обратный оператор $L^{-1} : L_2(0,T;V^*) \times V \to E_1$ непрерывен.*
2. *Оператор $K : E_1 \to L_2(0,T;V^*) \times V$ вполне непрерывен.*

Доказательство. 1. Для того, чтобы доказать непрерывную обратимость оператора $L : E_1 \to L_2(0,T;V^*) \times V$, $L(v) = ((\varkappa A + J)v' + 2Dv, v|_{t=0})$, воспользуемся теоремой Банаха об обратном операторе.

В силу линейности для доказательства непрерывности оператора L достаточно доказать его ограниченность. Для любой функции $v \in E_1$ в силу определения нормы в прямом произведении пространств получим

$$\|L(v)\|_{L_2(0,T;V^*)\times V} = \|(\varkappa A + J)v' + 2Dv\|_{L_2(0,T;V^*)} + \|v|_{t=0}\|_V \leqslant$$
$$\leqslant \|(\varkappa A + J)v'\|_{L_2(0,T;V^*)} + \|2Dv\|_{L_2(0,T;V^*)} + \max_{t\in[0,T]} \|v(t)\|_V .$$

В силу неравенств (2.1.10),(2.1.11) и (2.1.16) имеем

$$\|L(v)\|_{L_2(0,T;V^*)\times V} \leqslant l_1\|v'\|_{L_2(0,T;V)} + 2C_2\|v\|_{L_2(0,T;V)} +$$
$$+\|v\|_{C([0,T],V)} \leqslant l_1\|v'\|_{L_2(0,T;V)} + 2C_2\sqrt{T}\|v\|_{C([0,T],V)} + \|v\|_{C([0,T],V)} \leqslant$$
$$\leqslant \left(l_1 + 2C_2\sqrt{T} + 1\right)\left(\|v'\|_{L_2(0,T;V)} + \|v\|_{C([0,T],V)}\right) =$$
$$= \left(l_1 + 2C_2\sqrt{T} + 1\right)\|v\|_{E_1}.$$

Здесь мы воспользовались неравенством $\|v\|_{L_2(0,T;V)} \leqslant \sqrt{T}\|v\|_{C([0,T],V)}$, которое следует из непрерывного вложения $C([0,T],V) \subset L_2(0,T;V)$.

Таким образом, мы получили неравенство

$$\|L(v)\|_{L_2(0,T;V^*)\times V} \leqslant (l_1 + 2C_2\sqrt{T} + 1)\|v\|_{E_1},$$

из которого и следует непрерывность оператора L.

Покажем теперь, что оператор L является взаимно однозначным. Для этого докажем, что для любых $f \in L_2(0,T;V^*)$, $v_0 \in V$ существует единственная функция $v \in E_1$ такая, что $L(v) = (f, v_0)$. Последнее означает, что задача

$$(\varkappa A + J)v' + 2Dv = f, \quad v|_{t=0} = v_0 \tag{2.1.17}$$

имеет единственное решение $v \in E_1$ для любых $f \in L_2(0,T;V^*), v_0 \in V$. Покажем это.

Поскольку оператор $(\varkappa A + J)$ непрерывно обратим как оператор из $L_2(0,T;V)$ в $L_2(0,T;V^*)$, то применяя $(\varkappa A+J)^{-1}$ к уравнению (2.1.17), получим, что задача (2.1.17) эквивалентна следующей задаче:

$$v' + 2(\varkappa A + J)^{-1}Dv = (\varkappa A + J)^{-1}f, \quad v|_{t=0} = v_0. \tag{2.1.18}$$

Определим отображение $U : C([0,T],V) \to C([0,T],V)$ по следующей формуле

$$(Uv)(t) = v_0 - \int\limits_0^t \big(2(\varkappa A+J)^{-1}Dv(s) - (\varkappa A+J)^{-1}f(s)\big)ds, \quad t \in [0,T].$$

Для любых $u, v \in C([0,T],V)$ имеем

$$\|(Uu)(t) - (Uv)(t)\|_V = \| \int\limits_0^t \big(2(\varkappa A+J)^{-1}Du(s)\big)ds -$$

$$-\int\limits_0^t \big(2(\varkappa A+J)^{-1}Dv(s)\big)ds\|_V \leqslant 2\int\limits_0^t \|(\varkappa A+J)^{-1}D(u-v)(s)\|_V ds.$$

Воспользовавшись оценкой (2.1.12) получим

$$\|(Uu)(t) - (Uv)(t)\|_V \leqslant 2\varkappa^{-1}\int\limits_0^t \|D(u-v)(s)\|_{V^*}ds.$$

В силу оценки (2.1.15) имеем

$$\|(Uu)(t) - (Uv)(t)\|_V \leqslant 2C_2\varkappa^{-1}\int\limits_0^t \|(u-v)(s)\|_V ds.$$

Для $k > 0$ (точное значение k будет указано позднее) имеем

$$\|(Uu)(t) - (Uv)(t)\|_V \leqslant 2C_2\varkappa^{-1}\int\limits_0^t \|(u-v)(s)\|_V \exp\,(-ks)\exp\,(ks)ds \leqslant$$

$$\leqslant 2C_2\varkappa^{-1}\int\limits_0^t \max_{s\in[0,t]}(\exp\,(-ks)\|(u-v)(s)\|_V)\exp\,(ks)ds =$$

$$= 2C_2\varkappa^{-1}\|u-v\|_{C([0,t],V),k}\int\limits_0^t \exp\,(ks)ds \leqslant$$

$$\leqslant 2C_2\varkappa^{-1}\|u-v\|_{C([0,T],V),k}\left((\exp\,(kt)-1)k^{-1}\right).$$

Таким образом получаем, что при всех $t \in [0,T]$ имеет место следующее неравенство

$$\|(Uu)(t)-(Uv)(t)\|_V \leqslant 2C_2\varkappa^{-1}\|u-v\|_{C([0,T],V),k}((\exp\,(kt)-1)k^{-1}).$$

Умножая обе части неравенства на $\exp\,(-kt)$, получим

$$\exp\,(-kt)\|(Uu)(t)-(Uv)(t)\|_V \leqslant 2C_2\varkappa^{-1}\|u-v\|_{C([0,T],V),k}\times$$
$$\times((1-\exp\,(-kt))k^{-1}) \leqslant 2C_2\varkappa^{-1}\|u-v\|_{C([0,T],V),k}((1-\exp\,(-kT))k^{-1}).$$

Поскольку правая часть последнего неравенства не зависит от t, то переходя к максимуму по t в левой части и выбирая k таким образом, чтобы $2C_2(k\varkappa)^{-1} \leqslant 1$, в силу того, что $(1-\exp\,(-kT)) < 1$, получим, что

$$\|Uu-Uv\|_{C([0,T],V),k} \leqslant \lambda\|u-v\|_{C([0,T],V),k}, \quad \text{где}\ \ 0<\lambda<1.$$

Согласно принципу сжимающих отображений, существует точно один элемент $u \in C([0,T],V)$, для которого $u = Uu$, то есть для любого $t \in [0,T]$

$$u(t) = v_0 - \int\limits_0^t \left(2(\varkappa A+J)^{-1}Du(s) - (\varkappa A+J)^{-1}f(s)\right)ds.$$

Таким образом существует единственное решение задачи (2.1.18) и, следовательно, задачи (2.1.17). Получаем, что оператор $L: E_1 \to L_2(0,T;V^*)\times V$ является взаимно однозначным.

В итоге, в силу теоремы Банаха об обратном операторе, получаем, что оператор $L : E_1 \to L_2(0,T;V^*)\times V$ обратим и обратный оператор $L^{-1} : L_2(0,T;V^*)\times V \to E_1$ непрерывен.

2. Вполне непрерывность оператора $K: E_1 \to L_2(0,T;V^*)\times V, \quad K(v) = (B(v),0)$ следует из вполне непрерывности оператора $B: E_1 \to L_2(0,T;V^*)$ (третий пункт леммы 2.1.1), что и требовалось доказать. □

Введем вспомогательное семейство операторных уравнений:

$$L(v) - \eta K(v) = \eta(f, v_0), \quad \text{где } \eta \in [0,1]. \tag{2.1.19}$$

Установим априорную оценку для решений этого семейства. Важно отметить, что семейство операторных уравнений (2.1.19) содержит в себе как частный случай при $\eta = 1$ операторное уравнение (2.1.9).

Имеет место следующая

Теорема 2.1.4. *Если* $v \in E_1$ *— решение уравнения* (2.1.19) *для некоторого* $\eta \in [0,1]$, *то для него имеет место следующая априорная оценка:*

$$\|v\|_{E_1} \leqslant C_3, \quad C_3 = C_3(T, \|f\|_{L_2(0,T;V^*)}, \|v_0\|_V). \tag{2.1.20}$$

Доказательство. Пусть $v \in E_1$ — решение уравнения (2.1.19) для некоторого $\eta \in [0,1]$. Следовательно, функция v удовлетворяет равенству

$$(\varkappa A + J)v'(t) + 2Dv(t) - \eta B(v)(t) = f(t) \tag{2.1.21}$$

и начальному условию $v(0) = \eta v_0$.

Применим первую компоненту (2.1.21) при почти всех $t \in (0,T)$ к $v(t)$:

$$\langle(\varkappa A + J)v', v\rangle + 2\langle Dv, v\rangle - \eta\langle B(v), v\rangle = \eta\langle f(t), v\rangle.$$

В силу соленоидальности v имеем

$$\langle B(v), v\rangle = \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i(t)v_j(t)\frac{\partial v_j(t)}{\partial x_i}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i(t)\frac{\partial\,(v_j(t)v_j(t))}{\partial x_i}\,dx = 0.$$

Таким образом получаем, что

$$\langle(\varkappa A + J)v'(t), v(t)\rangle + 2\langle Dv(t), v(t)\rangle = \eta\langle f(t), v(t)\rangle \leqslant$$
$$\leqslant \eta\|f(t)\|_{V^*}\|v(t)\|_V \leqslant 2^{-1}\eta\|v(t)\|_V^2 + 2^{-1}\eta\|f(t)\|_{V^*}^2.$$

Интегрирование этого неравенства по t от 0 до τ дает

$$\int\limits_0^\tau \langle(\varkappa A + J)v'(t), v(t)\rangle\,dt + 2\int\limits_0^\tau \langle Dv(t), v(t)\rangle\,dt \leqslant$$
$$\leqslant 2^{-1}\eta\int\limits_0^\tau \|v(t)\|_V^2\,dt + 2^{-1}\eta\int\limits_0^\tau \|f(t)\|_{V^*}^2\,dt. \tag{2.1.22}$$

Из определения оператора $\varkappa A + J$ и интегрирования по частям следует

$$\int\limits_0^\tau \langle \varkappa A v'(t), v(t)\rangle\,dt = \int\limits_0^\tau \int\limits_\Omega \varkappa \nabla v'(t) : \nabla v(t)\,dx\,dt =$$

$$= \varkappa 2^{-1} \int\limits_0^\tau \frac{d}{dt}(\int\limits_\Omega \nabla v(t) : \nabla v(t)\,dx)\,dt =$$

$$= \varkappa 2^{-1} \int\limits_0^\tau \frac{d}{dt}(\|v(t)\|_V^2)\,dt = \varkappa 2^{-1}\|v(\tau)\|_V^2 - \eta^2 \varkappa 2^{-1}\|v_0\|_V^2.$$

Далее получим, что

$$2\int\limits_0^\tau \langle Jv'(t), v(t)\rangle\,dt = 2\int\limits_0^\tau \int\limits_\Omega v'(t)v(t)\,dx\,dt = \int\limits_0^\tau \frac{d}{dt}(\int\limits_\Omega v(t)v(t)\,dx)\,dt =$$

$$= \int\limits_0^\tau \frac{d(\|v(t)\|_H^2)}{dt}\,dt = \|v(\tau)\|_H^2 - \eta^2\|v_0\|_H^2.$$

Тогда (2.1.22) можно переписать в виде

$$\varkappa\|v(\tau)\|_V^2 + 1\|v(\tau)\|_H^2 = \eta^2\varkappa\|v_0\|_V^2 + \eta^2\|v_0\|_H^2 -$$

$$-4\int\limits_0^\tau \langle Dv(t), v(t)\rangle\,dt + \eta\int\limits_0^\tau \|v(t)\|_V^2\,dt + \eta\int\limits_0^\tau \|f(t)\|_{V^*}^2\,dt.$$

Оценивая правую часть сверху и пользуясь тем, что $\eta \leqslant 1$, получим

$$\varkappa\|v(\tau)\|_V^2 + \|v(\tau)\|_H^2 \leqslant 2|\int\limits_0^\tau \langle \varkappa\|v_0\|_V^2 + \|v_0\|_H^2 +$$

$$+4|\int\limits_0^\tau \langle Dv(t), v(t)\rangle dt| + \int\limits_0^\tau \|v(t)\|_V^2\,dt + \int\limits_0^\tau \|f(t)\|_{V^*}^2\,dt.$$

Поскольку $\|v(\tau)\|_H^2 \geqslant 0$, то оценивая здесь левую часть снизу, имеем

$$\varkappa\|v(\tau)\|_V^2 \leqslant \varkappa\,\|v_0\|_V^2 + \|v_0\|_H^2 +$$

$$+4|\int\limits_0^\tau \langle Dv(t), v(t)\rangle\,dt| + \int\limits_0^\tau \|v(t)\|_V^2\,dt + \int\limits_0^\tau \|f(t)\|_{V^*}^2\,dt. \qquad (2.1.23)$$

Оценим первые три слагаемых в правой части неравенства:

$$|\int_0^\tau \langle Dv(t), v(t)\rangle\, dt| = |\int_0^\tau \int_\Omega \nu(\theta)\mathcal{E}(v(t)) : \nabla v(t)\, dx\, dt| \leqslant C_2 \int_0^\tau \|v(t)\|_V^2\, dt;$$

$$\int_0^\tau \|f(t)\|_{V^*}^2\, dt \leqslant \int_0^T \|f(t)\|_{V^*}^2 dt \leqslant \|f\|^2_{L_2(0,T;V^*)}.$$

В итоге неравенство (2.1.23) можно переписать в виде:

$$\varkappa\|v(\tau)\|_V^2 \leqslant \|f\|^2_{L_2(0,T;V^*)} + \varkappa\,\|v_0\|_V^2 + \|v_0\|_H^2 + (2C_2+1)\int_0^\tau \|v(t)\|_V^2\, dt,$$

что то же самое в виде

$$\|v(\tau)\|_V^2 \leqslant \varkappa^{-1}(\|f\|^2_{L_2(0,T;V^*)} + \varkappa\|v_0\|_V^2 + \|v_0\|_H^2) + (2C_2+1)\varkappa^{-1}\int_0^\tau \|v(t)\|_V^2\, dt.$$

Воспользовавшись теперь неравенством Гронуолла–Беллмана, получим

$$\|v(\tau)\|_V^2 \leqslant \varkappa^{-1}\exp\,((2C_2+1)\varkappa^{-1}\tau)(\|f\|^2_{L_2(0,T;V^*)} + \varkappa\|v_0\|_V^2 + \|v_0\|_H^2) \leqslant$$
$$\leqslant \varkappa^{-1}\exp\,((2TC_2+T)\varkappa^{-1})(\|f\|^2_{L_2(0,T;V^*)} + \varkappa\|v_0\|_V^2 + \|v_0\|_H^2).$$

Отсюда легко следует, что

$$\|v\|^2_{C([0,T],V)} \leqslant \varkappa^{-1}\exp\,((2C_2+)T\varkappa^{-1})(\|f\|^2_{L_2(0,T;V^*)} + \varkappa\|v_0\|_V^2 + \|v_0\|_H^2). \quad (2.1.24)$$

Для получения оценки на $\|v'\|_{L_2(0,T;V)}$ заметим, что если $v \in E_1$ удовлетворяет уравнению (2.1.19), то справедливо равенство:

$$(\varkappa A + J)v' + 2Dv - \eta B(v) = \eta f.$$

С помощью оператора $(\varkappa A + J)^{-1}$ получаем

$$v' = (\varkappa A + J)^{-1}\left(-2Dv + \eta B(v) + \eta f\right).$$

Отсюда, воспользовавшись оценкой (2.1.13)

$$\|v'\|_{L_2(0,T;V)} = \left\|(\varkappa A + J)^{-1}\left(-2Dv + \eta B(v) + \eta f\right)\right\|_{L_2(0,T;V)} \leqslant$$
$$\leqslant \varkappa^{-1}\left\|(-2Dv + \eta B(v) + \eta f)\right\|_{L_2(0,T;V^*)} \leqslant$$
$$\leqslant \varkappa^{-1}\left(2\|Dv\|_{L_2(0,T;V^*)} + \eta\|B(v)\|_{L_2(0,T;V^*)} + \eta\|f\|_{L_2(0,T;V^*)}\right).$$

В силу оценок (2.1.14) и (2.1.16) и того, что $\eta \leqslant 1$, получим

$$\|v'\|_{L_2(0,T;V)} \leqslant \varkappa^{-1}(2C_2\|u\|_{L_2(0,T;V)} + C_1\|v\|^2_{C([0,T],V)} + \|f\|_{L_2(0,T;V^*)}).$$

В силу непрерывного вложения $C([0,T],V) \subset L_2(0,T;V)$ имеем

$$\|v'\|_{L_2(0,T;V)} \leqslant 2C_2\sqrt{T}\varkappa^{-1}\|v\|_{C([0,T],V)} + C_1\varkappa^{-1}\|v\|^2_{C([0,T],V)} + \varkappa^{-1}\|f\|_{L_2(0,T;V^*)}.$$

Воспользовавшись теперь (2.1.24), получим оценку

$$\|v'\|_{L_2(0,T;V)} \leqslant C_4, \quad C_4 = C_4(T, \|f\|_{L_2(0,T;V^*)}, \|v_0\|_V). \tag{2.1.25}$$

Из оценок (2.1.24) и (2.1.25) и получаем, что для решения уравнения (2.1.19) имеет место требуемая оценка (2.1.20), что и требовалось доказать. □

Теорема 2.1.5. *Для любых $f \in L_2(0,T;V^*), v_0 \in V$ операторное уравнение* (2.1.9) *имеет по меньшей мере одно решение $v \in E_1$.*

Доказательство. Обозначим $R = C_3 + 1$. Из оценки (2.1.20) следует что все решения семейства уравнений (2.1.19) лежат в шаре $B_R \subset E_1$ с центром в нуле. Поэтому ни одно из уравнений этого семейства не имеет решений на границе этого шара B_R. В силу непрерывной обратимости оператора $L : E_1 \times V \to L_2(0,T;V^*)$ все решения следующего семейства операторных уравнений

$$v - \eta L^{-1}\left[K(v) + (f, v_0)\right] = 0, \qquad \eta \in [0,1],$$

лежат внутри того же шара B_R.

В силу второго пункта леммы 2.1.3 отображение $(K(\cdot) + (f, v_0)) : E_1 \to L_2(0,T;\, V^*) \times V$ вполне непрерывно.

В силу первого пункта той же леммы оператор $L^{-1} : L_2(0,T;V^*) \times V \to E_1$ непрерывен. Таким образом, отображение $L^{-1}\left[K(\cdot) + (f, v_0)\right] : E_1 \to E_1$ вполне непрерывно как суперпозиция непрерывного и вполне непрерывного отображений.

Введём отображение

$$G : [0,1] \times E_1 \to E_1, \quad G(\eta, v) = \eta L^{-1}\left[K(v) + (f, v_0)\right].$$

Тогда в силу вышесказанного отображение G вполне непрерывно по совокупности переменных η и v. Следовательно векторное поле $\Phi(\eta, v) = v - G(\eta, v)$ вполне непрерывно и невырождено на границе шара B_R. Таким образом, для него определена степень Лере–Шаудера $\deg_{LS}(\Phi, B_R, 0)$.

По свойству гомотопической инвариантности степени получим, что

$$\deg_{LS}(\Phi(0,\cdot), B_R, 0) = \deg_{LS}(\Phi(1,\cdot), B_R, 0).$$

Поскольку в силу определения $\Phi(0,\cdot) = I$, а по свойству нормировки степени $\deg_{LS}(I, B_R, 0) = 1$, то мы имеем, что $\deg\ _{LS}(\Phi(1,\cdot), B_R, 0) = 1$.

Таким образом существует хотя бы одно решение $v \in E_1$ уравнения $v - L^{-1}[K(v) + +(f, v_0)] = 0$ и, следовательно, уравнения (2.1.9).

Из теоремы 2.1.5 следует, что тогда имеет решение и операторное уравнение (2.1.8), причём это решение удовлетворяет начальному условию $v(0) = v_0$. Отсюда вытекает существование хотя бы одного слабого решения начально–краевой задачи (2.1.1)–(2.1.2), что и требовалось доказать. □

2.1.3 Доказательство разрешимости начально–краевой задачи (2.1.3)–(2.1.4)

Рассмотрим следующую начально–краевую задачу (2.1.3)–(2.1.4) при фиксированных $\hat{\theta} \in E_2$ и $v \in E_1$:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} - \chi \triangle \theta = \big(\nu(\hat{\theta})\mathcal{E}(v)\big) : \mathcal{E}(v) + 2\varkappa \frac{\partial \mathcal{E}(v)}{\partial t} : \mathcal{E}(v) + g; \tag{2.1.26}$$

$$\theta|_{t=0} = \theta_0 \quad \text{в } \Omega, \quad \theta|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0. \tag{2.1.27}$$

Слабое решение задачи (2.1.26)–(2.1.27) определим как $\theta \in E_2$, удовлетворяющую (2.1.6) и начальному условию $\theta|_{t=0} = \theta_0$.

Для начально–краевой задачи (2.1.26)–(2.1.27) справедлива

Теорема 2.1.6. *Пусть функция $\nu(\theta) \in C^2(-\infty, +\infty)$ и $0 < \nu(\theta) \le M$, $g \in L_1(0, T; L_1(\Omega))$, $\theta_0 \in W_p^{1-2/p}(\Omega)$, $\hat{\theta} \in E_2$, $v \in E_1$. Тогда при $1 < p < 4/3$ для $n = 2$ и при $1 < p < 10/9$ для $n = 3$ задача (2.1.26)–(2.1.27) имеет по крайней мере одно слабое решение и справедлива оценка*

$$\|\theta\|_{E_2} \le R_2(\|g\|_{L_1(0,T;L_1(\Omega))} + \|\frac{\partial v}{\partial t}\|^2_{L_2(0,T;H)} + \|\theta_0\|_{W_p^{1-2/p}(\Omega)}). \tag{2.1.28}$$

Доказательство данной теоремы приведено в работе [151]. Отметим, что при исследовании слабой разрешимости задачи (2.1.26)–(2.1.27) в правой части (2.1.26) появляются слагаемые из $L_1(Q_T)$, что вызывает существенные трудности.

2.1.4 Построение последовательных приближений

Рассмотрим последовательность $(v^n, \theta^n), n = 0, 1, 2, \ldots,$ определяемую следующим образом. Пусть v^0 и θ^0 означают начальные значения v_0 и θ_0 для v и θ из (2.1.2) и (2.1.4). Пусть (v^n, θ^n) известны. Тогда вначале находится v^{n+1} как слабое решение задачи

$$\frac{\partial v^{n+1}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i^{n+1} \frac{\partial v^{n+1}}{\partial x_i} - 2\mathrm{Div}\,(\nu(\theta^n)\mathcal{E}(v^{n+1})) - \\ -\varkappa \frac{\partial \Delta v^{n+1}}{\partial t} + \mathrm{grad}\, p = f; \tag{2.1.29}$$

$$\mathrm{div}\, v^{n+1} = 0 \quad \text{в } Q_T; \quad v^{n+1}|_{t=0} = v_0 \quad \text{в } \Omega; \quad v^{n+1}|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0, \tag{2.1.30}$$

затем, при найденном v^{n+1} находится θ^{n+1} как слабое решение задачи

$$\frac{\partial \theta^{n+1}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i^{n+1} \frac{\partial \theta^{n+1}}{\partial x_i} - \chi \triangle\, \theta^{n+1} = 2\nu(\theta^n)\mathcal{E}(v^{n+1}) : \mathcal{E}(v^{n+1}) + \\ +2\varkappa \frac{\partial \mathcal{E}(v^{n+1})}{\partial t} : \mathcal{E}(v^{n+1}) + g; \tag{2.1.31}$$

$$\theta^{n+1}|_{t=0} = \theta_0 \quad \text{в } \Omega; \quad \theta^{n+1}|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0. \tag{2.1.32}$$

Отметим, что слабым решением задачи (2.1.29)–(2.1.30) называется функция $v^{n+1} \in E_1$, удовлетворяющая соотношению (2.1.5) и начальному условию $v^{n+1}|_{t=0} = v_0$, а слабым решением задачи (2.1.31)–(2.1.32) называется функция $\theta^{n+1} \in E_2$, удовлетворяющая соотношению (2.1.6) и начальному условию $\theta^{n+1}|_{t=0} = \theta_0$.

Разрешимость задачи (2.1.29)–(2.1.30) следует из теоремы 2.1.3. При найденной функции v^{n+1} выполнены все требования теоремы 2.1.6. Отсюда следует, что задача (2.1.31)–(2.1.32) также разрешима.

2.1.5 Предельный переход

Рассмотрим теперь последовательность (v^n, θ^n), $n = 1, 2, \ldots$, где v^n — решение задачи (2.1.29)–(2.1.30), а θ^n — решение задачи (2.1.31)–(2.1.32). Исследуем вопрос о сходимости последовательности (v^n, θ^n). Рассмотрим сначала θ^n.

Лемма 2.1.4. *Последовательность θ^n относительно компактна в $L_p(0, T; L_p(\Omega))$, где p удовлетворяет условиям теоремы 2.1.2.*

Доказательство. Воспользуемся следующей теоремой Симона 1.1.5. Возьмем в качестве $X = \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$, $E = L_p(\Omega)$, $Y = W_p^{-1}(\Omega)$, $1 < p < 4/3$ для $n = 2$ и $1 < p < 10/9$ для $n = 3$. Тогда условия на X, E, Y выполняются. Из оценки (2.1.28) вытекает, что θ^n ограничена в $L_p(0, T; W_p^1(\Omega))$, а $\partial\theta^n/\partial t$ ограничена в $L_1(0, T; W_p^{-1}(\Omega))$. Поэтому последовательность θ^n относительно компактна в $L_p(0, T; L_p(\Omega))$, что и требовалось доказать. $\square$

Без ограничения общности будем считать, что θ^n сходится к θ в п.в. в $L_p(Q_T)$, где p удовлетворяет условиям теоремы 2.1.2.

Рассмотрим теперь v^n. В силу оценки (2.1.7) получаем, что v^n слабо сходится к v в $L_2(0, T; V)$, а $\partial v^n/\partial t$ слабо сходится в $L_2(0, T; V^*)$.

Покажем сначала, что v^n сходится к v, где v — это решение задачи (2.1.29)–(2.1.30) при $\theta = \lim \theta^n$.

Умножая (2.1.29) в $L_2(Q_T)$ на $\varphi \in L_2(0, T; V)$ и интегрируя по частям, имеем

$$\int\limits_0^T \int\limits_\Omega (v^n)'(t)\,\varphi\,dx\,dt - \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i^n(t) v_j^n(t) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\,dx\,dt +$$

$$+2\int\limits_0^T \int\limits_\Omega \nu(\theta^n)\mathcal{E}(v^n(t)) : \nabla\varphi\,dx\,dt + \varkappa \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \nabla(v^n)'(t) : \nabla\varphi\,dx\,dt =$$

$$= \int\limits_0^T \int\limits_\Omega f(t)\varphi\,dx\,dt. \tag{2.1.33}$$

Заметим, что

$$\int_0^T \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i^n(t) v_j^n(t) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx\, dt = -\int_0^T \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i^n(t) \frac{\partial v_j^n(t)}{\partial x_i} \varphi_j\, dx\, dt$$

$$\int_0^T \int_\Omega \nu(\theta^n) \mathcal{E}(v^n(t)) : \nabla\varphi\, dx\, dt = \langle \nu(\theta^n)\mathcal{E}(v^n(t)), \nabla\varphi\rangle = \langle \mathcal{E}(v^n(t)), \nu(\theta^n)\nabla\varphi\rangle.$$

Следовательно, в силу того, что v^n слабо сходится к v в $L_2(0,T;V)$, а $\partial v^n/\partial t$ слабо сходится к $\partial v/\partial t$ в $L_2(0,T;V^*)$ имеем сходимости:

$$\int_0^T \int_\Omega (v^n)'(t)\, \varphi\, dx\, dt \rightharpoonup \int_0^T \int_\Omega v'(t)\, \varphi\, dx\, dt.$$

Установим теперь сходимость

$$\int_0^T \int_\Omega \nabla (v^n)'(t) : \nabla\varphi\, dx\, dt \rightharpoonup \int_0^T \int_\Omega \nabla v'(t) : \nabla\varphi\, dx\, dt.$$

Из теоремы 1.1.5 вытекает вполне непрерывное вложение $F = \{v : v \in C([0,T],V);\ v' \in L_2(0,T;V)\} \subset C([0,T], L_4(\Omega))$. Отсюда, учитывая априорные оценки, получаем (при необходимости переходя к подпоследовательностям), что $v_n \to v$ сильно в $C([0,T], L_4(\Omega))$. Таким образом, v_n сходится к v сильно в $C([0,T], L_4(\Omega))$, а $\nabla(v_n)$ сходится к ∇v слабо в $L_2(0,T;L_2(\Omega))$. Следовательно, их произведение сходится слабо к произведению пределов.

Используя установленные выше сходимости, получаем

$$\langle \mathcal{E}(v^n(t)), \nu(\theta^n)\nabla\varphi\rangle \rightharpoonup \langle \mathcal{E}(v(t)), \nu(\theta^n)\nabla\varphi\rangle$$

$$\int_0^T \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i^n(t) \frac{\partial v_j^n(t)}{\partial x_i} \varphi_j\, dx\, dt \rightharpoonup \int_0^T \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i(t) \frac{\partial v_j(t)}{\partial x_i} \varphi_j\, dx\, dt.$$

Переходя к пределу в (2.1.33), имеем

$$\int_0^T \int_\Omega v'(t)\, \varphi\, dx\, dt - \int_0^T \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i(t) v_j(t) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx\, dt +$$

$$+2\int\limits_0^T\int\limits_\Omega \nu(\theta^n)\mathcal{E}(v(t)):\nabla\varphi\,dx\,dt+\varkappa\int\limits_0^T\int\limits_\Omega \nabla(v)'(t):\nabla\varphi\,dx\,dt=$$

$$=\int\limits_0^T\int\limits_\Omega f(t)\varphi\,dx\,dt.$$

Дифференцируя полученное равенство по t, получим, что v удовлетворяет равенству

$$\int\limits_\Omega v'(t)\,\varphi\,dx-\int\limits_\Omega\sum_{i,j=1}^n v_i(t)v_j(t)\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx+$$

$$+2\int\limits_\Omega \nu(\theta^n)\mathcal{E}(v(t)):\nabla\varphi\,dx+\varkappa\int\limits_\Omega \nabla v'(t):\nabla\varphi\,dx=\int\limits_\Omega f(t)\varphi\,dx.$$

Следовательно v является решением (2.1.29)–(2.1.30), что и требовало доказать.

Для того, чтобы обосновать предельный переход в уравнение (2.1.31), нам понадобятся более сильный результат о сходимости v^n. Именно, справедлива теорема.

Теорема 2.1.7. *Подпоследовательность v^n сильно сходится в $L_2(0,T;V)$ к v.*

Доказательство. Умножая (2.1.29) на v^n в H имеем:

$$\int\limits_\Omega (v^n)'v^n\,dx-\int\limits_\Omega\sum_{i,j=1}^n v_i^n v_j^n\frac{\partial v_j^n}{\partial x_i}\,dx+$$

$$+2\int\limits_\Omega \nu(\theta)\mathcal{E}(v^n):\nabla v^n\,dx+\varkappa\int\limits_\Omega \nabla(v^n)':\nabla v^n\,dx=\langle f,v^n\rangle.$$

Преобразуем слагаемые в левой части следующим образом:

$$\int\limits_\Omega (v^n)'(t)v^n(t)dx=2^{-1}\int\limits_\Omega\frac{\partial(v^n(t)v^n(t))}{\partial t}\,dx=$$

$$=2^{-1}\frac{d}{dt}\int\limits_\Omega v^n(t)v^n(t)dx=2^{-1}\frac{d}{dt}\|v^n(t)\|_H^2;$$

$$\varkappa \int\limits_{\Omega} \nabla (v^n)'(t) : \nabla v^n(t) dx = \frac{\varkappa}{2} \int\limits_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla v^n(t) : \nabla v^n(t))\, dx =$$

$$= \varkappa/2 \frac{d}{dt} \int\limits_{\Omega} \nabla v^n(t) : \nabla v^n(t)\, dx = \varkappa/2 \frac{d}{dt} \|v^n(t)\|_V^2;$$

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} v_i^n(t) v_j^n(t) \frac{\partial v_j^n(t)}{\partial x_i}\, dx = \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} v_i^n(t) \frac{\partial (v_j^n(t) v_j^n(t))}{\partial x_i}\, dx =$$

$$= -\int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial v_i^n(t)}{\partial x_i} v_j^n(t) v_j^n(t)\, dx = -\int\limits_{\Omega} \operatorname{div}\, v^n(t)\ v_j^n(t) v_j^n(t)\, dx = 0;$$

$$2 \int\limits_{\Omega} \nu(\theta) \mathcal{E}(v^n) : \nabla v^n\, dx = \int\limits_{\Omega} \nu(\theta) \mathcal{E}(v^n) : \nabla v^n\, dx + \int\limits_{\Omega} \nu(\theta) \mathcal{E}(v^n) : (\nabla v^n)^T\, dx =$$

$$= 2 \int\limits_{\Omega} \nu(\theta) \mathcal{E}(v^n) : \mathcal{E}(v^n)\, dx = 2 \|\nu^{\frac{1}{2}}(\theta) \mathcal{E}(v^n)\|_H^2.$$

Перепишем это соотношение в виде:

$$\frac{d}{dt} \|v^n(t)\|_H^2 + \varkappa \frac{d}{dt} \|v^n(t)\|_V^2 + 4 \|\nu^{\frac{1}{2}}(\theta) \mathcal{E}(v^n)\|_H^2 = 2 \langle f(t), v^n(t) \rangle.$$

Проинтегрируем последнее равенство

$$\|v^n(T)\|_H^2 + \varkappa \|v^n(T)\|_V^2 + 4 \|\nu^{\frac{1}{2}}(\theta) \mathcal{E}(v^n)\|_{L_2(0,T;H)}^2\, dt =$$

$$= \|v^0\|_H^2 + \varkappa \|v^0\|_V^2 + 2 \int\limits_0^T \langle f(t), v^n(t) \rangle\, dt. \qquad (2.1.34)$$

Введем в $\aleph = H \times V \times L_2(0,T;V) \times L_2(0,T;H)$ норму $\|u\|_\aleph = (\|u_1\|_H^2 + \|u_2\|_V^2 + \|u_3\|_{L_2(0,T;V)}^2)^{1/2}$. Здесь $u = (u_1, u_2, u_3)$ — произвольный элемент из $\aleph$. Рассмотрим последовательность

$$u^n = (1/2 v^n(T), \varkappa/2 v^n(T), 2\nu^{1/2}(\theta) \mathcal{E}(v^n)).$$

В силу априорных оценок

$$v_n \rightharpoonup v \quad \text{слабо в } L_2(0,T;V); \quad v_n' \rightharpoonup v_*' \quad \text{слабо в } L_2(0,T;V^*) \quad \text{при } n \to +\infty.$$

Следовательно, каждое u_i^n, $i = 1,2,3$, слабо сходится к u_i. Из слабой сходимости u_i^n вытекает слабая сходимость u^n к предельному элементу

$$u = (1/2 v(T), \varkappa/2 v(T), 2\nu^{1/2}(\theta) \mathcal{E}(v)).$$

С другой стороны, из (2.1.34) в силу слабой сходимости v^n к v вытекает, что

$$\|u^n\|^2_{\aleph} \to 1/2\|v^0\|^2_H + \varkappa/2\|v^0\|^2_V + \int\limits_0^T \langle f(t), v(t)\rangle\, dt$$

а для v, так же как и для v^n, справедливо тождество

$$\|v(T)\|^2_H + \varkappa\|v(T)\|^2_V + 4\|\nu^{1/2}(\theta)\mathcal{E}(v)\|^2_{L_2(0,T;H)} =$$
$$= \|v^0\|^2_H + \varkappa\|v^0\|^2_V + 2\int\limits_0^T \langle f(t), v(t)\rangle\, dt.$$

Следовательно, $\|u^n\|_{\aleph} \to \|u\|_{\aleph}$.

Получаем, что u^n слабо сходится к u, а $\|u^n\|_{\aleph}$ сходится к $\|u\|_{\aleph}$. Следовательно, u^n сходится сильно к u в $\aleph$. Из сильной сходимости u^n в $\aleph$ вытекает сильная сходимость u^n_i в соответствующих пространствах. В частности, $v^n \to v$ в $L_2(0,T;V)$ сильно, что и требовалось доказать. $\square$

Покажем теперь, что полученное $\theta \in E_2$, является слабым решением задачи (2.1.1)–(2.1.4). Достаточно установить, что $\theta \in E_2$ и удовлетворяет соотношению (2.1.6).

Из (2.1.31) вытекает, что

$$\frac{d(\theta^n,\phi)}{dt} - (\sum_{i=1}^n v^n_i\theta^n, \frac{\partial\phi}{\partial x_i}) + \chi(\sum_{i=1}^n \frac{\partial\theta^n}{\partial x_i}, \sum_{i=1}^n \frac{\partial\phi}{\partial x_i}) = \langle g,\phi\rangle +$$
$$+2\nu(\theta^{n-1})\mathcal{E}(v^n) : \mathcal{E}(v^n),\phi) + 2\varkappa(\frac{\partial\mathcal{E}(v^n)}{\partial t} : \mathcal{E}(v^n)(t,x)), \mathcal{E}(\phi)) \qquad (2.1.35)$$

в смысле распределений на $(0,T)$ для любых $\phi \in C^\infty_0(\Omega)$. Умножим (2.1.35) на функцию $\psi(t)$, бесконечно дифференцируемую, удовлетворяющую условию $\psi(0) = \psi(T) = 0$ и проинтегрируем на [0,T]:

$$\chi\int\limits_0^T (\sum_{i=1}^n \frac{\partial\theta^n}{\partial x_i}, \sum_{i=1}^n \frac{\partial\phi}{\partial x_i})\,\psi(t)\,dt - \int\limits_0^T (\theta^n,\phi)\psi'(t)\,dt - \int\limits_0^T \sum_{i=1}^n (v^n_i\theta^n, \frac{\partial\phi}{\partial x_i})\psi(t)\,dt =$$
$$= \int\limits_0^T \langle g,\phi\rangle\psi(t)\,dt + 2\int\limits_0^T \nu(\theta^{n-1})\mathcal{E}(v^n) : \mathcal{E}(v^n),\phi)\psi(t)\,dt +$$

$$+2\varkappa\int\limits_0^T \Big(\frac{\partial \mathcal{E}(v^n)}{\partial t} : \mathcal{E}(v^n)(t,x)), \mathcal{E}(\phi)\Big)\,\psi(t)\,dt, \quad \phi\in C_0^\infty(\Omega). \tag{2.1.36}$$

Из сильной сходимости v^n в $L_2(0,T;V)$ и θ^n в $L_p(0,T;L_p(\Omega))$ вытекает возможность предельного перехода во всех слагаемых, кроме третьего в левой части (2.1.36).

Из оценки (2.1.28) вытекает ограниченность θ^n в $L_p(0,T;W_p^1(\Omega))$, а следовательно, слабая компактность в $L_p(0,T;W_p^1(\Omega))$. Считаем без ограничения общности, что θ^n слабо сходится к θ в $L_p(0,T;W_p^1(\Omega))$. Тогда в третьем слагаемом также допустим предельный переход.

Делая в (2.1.36) предельный переход, получаем при $\phi\in C_0^\infty(\Omega)$ тождество

$$\chi\int\limits_0^T \Big(\sum_{i=1}^n \frac{\partial\theta}{\partial x_i}, \sum_{i=1}^n \frac{\partial\phi}{\partial x_i}\Big)\,\psi(t)\,dt - \int\limits_0^T (\theta,\phi)\psi'(t)\,dt - \int\limits_0^T \Big(\sum_{i=1}^n v_i\theta, \sum_{i=1}^n \frac{\partial\phi}{\partial x_i}\Big)\psi(t)\,dt +$$

$$= \int\limits_0^T \langle g,\phi\rangle\psi(t)\,dt + 2\int\limits_0^T \nu(\theta)\mathcal{E}(v) : \mathcal{E}(v), \phi)\psi(t)\,dt +$$

$$+2\varkappa\int\limits_0^T \Big(\frac{\partial \mathcal{E}(v)}{\partial t} : \mathcal{E}(v)(t,x)), \mathcal{E}(\phi)\Big)\,\psi(t)\,dt. \tag{2.1.37}$$

Из (2.1.37) в силу произвольности ψ вытекает справедливость соотношения (2.1.6). Это и завершает доказательство Теоремы 2.1.2.

2.2 Существование оптимального управления с обратной связью для термо–модели Фойгта

В данном параграфе на основе аппроксимационно–топологического подхода к проблемам математической гидродинамики доказывается существование оптимального управления с обратной связью для задачи (2.1.1)–(2.1.4). Сначала сформулируем понятие решения для рассматриваемой задачи и основной результат данного параграфа.

2.2.1 Постановка задачи

Рассмотрим многозначное отображение $\Psi : W_1 \multimap W_2$ в качестве функции управления (W_1 и W_2 — нормированные пространства). Будем предполагать, что Ψ удовлетворяет следующим условиям:

(Ψ1) Отображение Ψ определено на пространстве W_1 и имеет непустые, компактные, выпуклые значения;

(Ψ2) Отображение Ψ полунепрерывно сверху и компактно;

(Ψ3) Отображение Ψ глобально ограничено, то есть существует константа $M > 0$ такая, что

$$\|\Psi\,(v)\|_{L_2(0,T;V^*)} := \sup\Big\{\|u\|_{L_2(0,T;V^*)} : u \in \Psi\,(v)\Big\} \leq M \text{ для всех } v \in W_1;$$

(Ψ4) Ψ слабо замкнуто в следующем смысле:
если $\{v_l\}_{l=1}^{\infty} \subset W_1, v_l \rightharpoonup v_0\,, u_l \in \Psi\,(v_l)$ и $u_l \to u_0$ в $L_2(0,T;V^*)$ тогда $u_0 \in \Psi\,(v_0)$.

Для нашей задачи рассмотрим два таких многозначных отображения: $F : E_1 \multimap L_2(0,T;V^*)$ и $G : E_2 \multimap L_2(0,T;W_p^{-1}(\Omega))$, удовлетворяющих ($\Psi$1)–($\Psi$4). Мы будем рассматривать слабую постановку задачи оптимального управления с обратной связью для начально-краевой задачи (2.1.1)–(2.1.4). Под обратной связью мы понимаем следующее условие:

$$f \in F(v), \qquad g \in G(\theta). \tag{2.2.1}$$

Определение 2.2.1. *Слабым решением задачи управления с обратной связью* (2.1.1)–(2.1.4), (2.2.1) *называется* (v, θ, f, g), *где*

$$v \in E_1, \quad \theta \in E_2, \quad f \in L_2(0,T;V^*), \quad g \in L_1(0,T;W_p^{-1}(\Omega)),$$

удовлетворяющие условиям обратной связи (2.2.1), *соотношениям*

$$\frac{d}{dt}\int\limits_\Omega v\,\varphi\,dx - \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\,dx + 2\int\limits_\Omega \nu(\theta)\mathcal{E}(v):\mathcal{E}(\varphi)\,dx+$$

$$+\varkappa\frac{d}{dt}\int\limits_\Omega \mathcal{E}(v):\mathcal{E}(\varphi)\,dx = \langle f(t),\varphi\rangle \quad \text{при всех } \varphi\in V \text{ и п.в. } t\in[0,T], \quad (2.2.2)$$

$$\frac{d}{dt}\int\limits_\Omega \theta\phi\,dx - \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i\theta_j \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i}\,dx + \chi\int\limits_\Omega \mathcal{E}(\theta):\mathcal{E}(\phi)\,dx =$$

$$= 2\int\limits_\Omega \big(\nu(\theta)\mathcal{E}(v):\mathcal{E}(v)\big):\phi\,dx + 2\varkappa\int\limits_\Omega \big(\frac{\partial \mathcal{E}(v)}{\partial t}:\mathcal{E}(v)\big):\phi\,dx+$$

$$+\langle g,\phi\rangle \quad \text{при всех } \phi\in C_0^\infty(\Omega) \text{ и п.в. } t\in[0,T], \quad (2.2.3)$$

и начальным условиям $v|_{t=0}=v_0$ *и* $\theta|_{t=0}=\theta_0$.

Первым результатом настоящего параграфа является следующая теорема:

Теорема 2.2.1. *Пусть функция* $\nu(\theta)\in C^2(-\infty,+\infty)$ *и* $0<\nu(\theta)\le M$, $v_0\in V$, $\theta_0\in W_p^{1-2/p}(\Omega)$. *Также пусть многозначные отображения* F *и* G *удовлетворяют условиям* ($\Psi 1$)*–*($\Psi 4$)*. Тогда при* $1<p<4/3$ *для* $n=2$ *и при* $1<p<10/9$ *для* $n=3$ *существует решение задачи управления с обратной связью* (2.1.1)*–*(2.1.4)*,* (2.2.1)*.*

Обозначим через $\Sigma\subset E_1\times E_2\times L_2(0,T;V^*)\times L_1(0,T;W_p^{-1}(\Omega))$ множество всех слабых решений задачи (2.1.1)–(2.1.4), (2.2.1). Рассмотрим произвольный функционал качества $\Phi:\Sigma\to\mathbb{R}$, удовлетворяющий следующим условиям:

(Φ1) Существует число γ такое, что $\Phi(v,\theta,f,g)\geqslant\gamma$ для всех $(v,\theta,f,g)\in\Sigma$.

(Φ2) Если $v_m\rightharpoonup v_*$ в E_1, $\theta_m\to\theta_*$ в $L_p(0,T;L_p(\Omega))$, $\theta_m\rightharpoonup\theta_*$ в $L_p(0,T;W_p^1(\Omega))$, $f_m\to f_*$ в $L_2(0,T;V^*)$ и $g_m\to g$ в $L_1(0,T;W_p^1(\Omega))$, p – удовлетворяет условиям теоремы 2.2.1, то

$$\Phi(v_*,\theta_*,f_*,g_*)\leqslant \varliminf_{m\to\infty}\Phi(v_m,\theta_m,f_m,g_m).$$

Основным результатом данного параграфа является следующая теорема.

Теорема 2.2.2. *Пусть выполнены условия теоремы 2.2.1 и пусть функционал* Φ *удовлетворяет условиям* (Φ1)*–*(Φ2)*, тогда задача оптимального управления с обратной связью* (2.1.1)*–*(2.1.4)*,* (2.2.1) *имеет хотя бы одно слабое решение* (v_*,θ_*,f_*,g_*) *такое, что*

$$\Phi(v_*,\theta_*,f_*,g_*)=\inf_{(v,\theta,f,g)\in\Sigma}\Phi(v,\theta,f,g).$$

Доказательство теоремы 2.2.1 проводится поэтапно. На первом этапе устанавливается разрешимость задачи (2.1.1)–(2.1.2), (2.2.1) с известной $\theta \in E_2$. Затем устанавливается разрешимость задачи (2.1.3)–(2.1.4), (2.2.1) с заданной $v \in E_1$. Далее, описывается итерационный процесс, состоящий в последовательном решении вышеприведенных задач, и, наконец, доказывается сходимость последовательных приближений к решению задачи (2.1.1)–(2.1.4), (2.2.1).

2.2.2 Доказательство разрешимости начально–краевой задачи (2.1.1)–(2.1.2), (2.2.1)

Рассмотрим начально–краевую задачу (2.1.1)–(2.1.2), (2.2.1) при фиксированной $\theta \in E_2$.

Слабое решение задачи (2.1.1)–(2.1.2), (2.2.1) определим как пару функций $(v, f) \in E_1 \times L_2(0, T; V^*)$, удовлетворяющую условию обратной связи (2.2.1), соотношению (2.2.2) и начальному условию $v|_{t=0} = v_0$.

Теорема 2.2.3. *Пусть функция* $\nu(\theta) \in C^2(-\infty, +\infty)$ *и* $0 < \nu(\theta) \leq M$, $v_0 \in V$, $\theta \in E_2$. *Также пусть многозначное отображение* F *удовлетворяет условиям* (Ψ*1*)–(Ψ*4*). *Тогда задача* (2.1.1)–(2.1.2), (2.2.1) *имеет по крайней мере одно слабое решение, для которого справедлива оценка*

$$\|v\|_{E_1} \leqslant R_1, \quad R_1 = R_1(T, \|v_0\|_V). \tag{2.2.4}$$

Для доказательства данной теоремы перейдем к операторной трактовке рассматриваемой задачи. Введём операторы A, B, D, J аналогично пункту 2.1.2.

Тогда (2.2.2) можно записать в следующем виде:

$$\langle Jv'(t), \varphi\rangle + \varkappa\langle Av'(t), \varphi\rangle + 2\langle Dv(t), \varphi\rangle - \langle B(v)(t), \varphi\rangle = \langle f(t), \varphi\rangle.$$

Поскольку в последнем равенстве функция $\varphi \in V$ произвольна, то оно эквивалентно следующему операторному уравнению:

$$(\varkappa A + J)v' + 2Dv - B(v) = f. \tag{2.2.5}$$

Итак, слабое решение задачи (2.1.1)–(2.1.2), (2.2.1) — это решение операторного уравнения (2.2.5), удовлетворяющее условию обратной связи (2.2.1) и начальному условию $v|_{t=0} = v_0$.

Введём следующие обозначения:

$$L : E_1 \to L_2(0,T;V^*) \times V, \qquad L(v) = ((\varkappa A + J)v' + 2Dv, v|_{t=0});$$
$$K : E_1 \to L_2(0,T;V^*) \times V, \qquad K(v) = (B(v), 0).$$

Тогда рассматриваемая задача (2.1.1)–(2.1.2), (2.2.1) эквивалентна следующему операторному уравнению, удовлетворяющему условию обратной связи (2.2.1):

$$L(v) - K(v) = (f, v_0). \tag{2.2.6}$$

Введем следующий оператор: $\mathcal{Y} : E_1 \to L_2(0,T;V^*) \times V$; $\mathcal{Y}(v) = (F(v), v_0)$. Тогда задача существования решения $(v, f) \in E_1 \times L_2(0,T;V^*)$ задачи (2.2.6), (2.2.1) эквивалентна задаче существования решения для следующего операторного включения

$$v \in \mathcal{M}(v), \quad \text{где } \mathcal{M}(v) = L^{-1}(\mathcal{Y}(v) + K(v)). \tag{2.2.7}$$

Наряду с операторным включением (2.2.7) рассмотрим вспомогательное семейство операторных включений:

$$v \in \lambda\mathcal{M}(v), \quad \text{где } \lambda \in [0,1]. \tag{2.2.8}$$

Теорема 2.2.4. *Для любых $v_0 \in V$ операторное уравнение* (2.2.7) *имеет по меньшей мере одно решение $v \in E_1$.*

Доказательство. Для доказательства данной теоремы воспользуемся теорией топологической степени для многозначных векторных полей (см., например, [13]). Для вспомогательного семейства операторных включений (2.2.8) выполнена Теорема 2.1.4. Обозначим $R = C_3 + 1$, где C_3 — константа из Теоремы 2.1.4. Из оценки (2.1.20) следует что все решения семейства уравнений (2.2.8) лежат в шаре $B_R \subset E_1$ с центром в нуле. Следовательно, $v \notin \lambda\mathcal{M}(v)$ для всех $(v, \lambda) \in \partial B_R \times [0,1]$. Используя свойство гомотопической инвариантности степени и свойство нормировки степени, получим, что

$$deg(I - \mathcal{M}, \bar{B}_R, 0) = deg(I, \bar{B}_R, 0) = 1.$$

Так как эта степень отлична от нуля, то существует хотя бы одно решение $v \in E_1$ операторного включения (2.2.7). $\square$

Поскольку существует решение $v \in E_1$ включения (2.2.7), то из вышеприведенных рассуждений следует, то задача (2.1.1)–(2.1.2), (2.2.1) имеет хотя бы одно решение.

2.2.3 Доказательство разрешимости начально–краевой задачи (2.1.3)–(2.1.4), (2.2.1)

Рассмотрим следующую задачу при фиксированных $\hat{\theta} \in E_2$ и $v \in E_1$:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} - \chi \triangle \theta - \big(\nu(\hat{\theta})\mathcal{E}(v)\big) : \mathcal{E}(v) - 2\varkappa \frac{\partial \mathcal{E}(v)}{\partial t} : \mathcal{E}(v) \in \Psi(\theta); \quad (2.2.9)$$

$$\theta|_{t=0} = \theta_0 \quad \text{в } \Omega, \quad \theta|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0. \quad (2.2.10)$$

Слабое решение задачи (2.2.9)–(2.2.10) определим как пару $(\theta, g) \in E_2 \times L_1(0,T; W_p^{-1}(\Omega))$, удовлетворяющую (2.2.3), условию обратной связи (2.2.1) и начальному условию $\theta|_{t=0} = \theta_0$.

Для начально–краевой задачи (2.2.9)–(2.2.10) справедлива

Теорема 2.2.5. *Пусть функция $\nu(\theta) \in C^2(-\infty, +\infty)$ и $0 < \nu(\theta) \leq M$, $\theta_0 \in W_p^{1-2/p}(\Omega)$, $\hat{\theta} \in E_2$, $v \in E_1$. Также пусть многозначное отображение G удовлетворяет условиям (Ψ1)–(Ψ4). Тогда при $1 < p < 4/3$ для $n = 2$ и при $1 < p < 10/9$ для $n = 3$ задача (2.2.9)–(2.2.10),* (2.2.1) *имеет по крайней мере одно слабое решение и справедлива оценка*

$$\|\theta\|_{E_2} \leq R_2(\|\frac{\partial v}{\partial t}\|^2_{L_2(0,T;H)} + \|\theta_0\|_{W_p^{1-2/p}(\Omega)}). \quad (2.2.11)$$

Доказательство данной теоремы приведено в работе [151].

2.2.4 Построение последовательных приближений

Рассмотрим последовательность $(v^n, \theta^n), n = 0, 1, 2, \ldots,$ определяемую следующим образом. Пусть v^0 и θ^0 означают начальные значения v_0 и θ_0 для v и θ из (2.1.2) и (2.1.4). Пусть (v^n, θ^n) известны. Тогда вначале находится

v^{n+1} как слабое решение задачи

$$\frac{\partial v^{n+1}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i^{n+1} \frac{\partial v^{n+1}}{\partial x_i} - 2\mathrm{Div}\ (\nu(\theta^n)\mathcal{E}(v^{n+1})) -$$

$$- \varkappa \frac{\partial \Delta v^{n+1}}{\partial t} + \mathrm{grad}\ p \in \Psi(v^{n+1}); \qquad (2.2.12)$$

$$\mathrm{div}\ v^{n+1} = 0 \quad \text{в } Q_T; \quad v^{n+1}|_{t=0} = v_0 \quad \text{в } \Omega; \quad v^{n+1}|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0, \qquad (2.2.13)$$

затем, при найденном v^{n+1} находится θ^{n+1} как слабое решение задачи

$$\frac{\partial \theta^{n+1}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i^{n+1} \frac{\partial \theta^{n+1}}{\partial x_i} - \chi \triangle \theta^{n+1} - 2\nu(\theta^n)\mathcal{E}(v^{n+1}) : \mathcal{E}(v^{n+1}) -$$

$$- 2\varkappa \frac{\partial \mathcal{E}(v^{n+1})}{\partial t} : \mathcal{E}(v^{n+1}) \in \Psi(\theta^{n+1}); \qquad (2.2.14)$$

$$\theta^{n+1}|_{t=0} = \theta_0 \quad \text{в } \Omega; \quad \theta^{n+1}|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0. \qquad (2.2.15)$$

Отметим, что слабым решением задачи (2.2.12)–(2.2.13) называется функция $v^{n+1} \in E_1$, удовлетворяющая соотношению (2.2.2), условию обратной связи (2.2.1) и начальному условию $v^{n+1}|_{t=0} = v_0$, а слабым решением задачи (2.2.14)–(2.2.15) называется функция $\theta^{n+1} \in E_2$, удовлетворяющая соотношению (2.2.3), условию обратной связи (2.2.1) и начальному условию $\theta^{n+1}|_{t=0} = \theta_0$.

Разрешимость задачи (2.2.12)–(2.2.13) следует из теоремы 2.2.3. При найденной функции v^{n+1} выполнены все требования теоремы 2.2.5. Отсюда следует, что задача (2.2.14)–(2.2.15) также разрешима.

2.2.5 Доказательство теоремы 2.2.1

Предельный переход в задачах (2.2.12)–(2.2.13), (2.2.14)–(2.2.15) полностью повторяется аналогично предельному переходу, приведенному в пункте 2.1.5 с двумя небольшими замечаниями.

Заметим, что принимая во внимания априорные оценки из теоремы 2.2.3 и условия (Ψ1)–(Ψ4), мы без ограничения общности можем предположить, что существует $f \in L_2(0,T;V^*)$ такое, что $f^n \to f \in F(v)$ при $n \to \infty$.

А также заметим, что принимая во внимания априорные оценки из теоремы 2.2.5 и условия (Ψ1)–(Ψ4), мы без ограничения общности можем предположить, что существует $g \in L_1(0,T;W_p^{-1}(\Omega))$ такое, что $g^n \to g \in G(\theta)$ при $n \to \infty$. Это и завершает доказательство теоремы 2.2.1.

2.2.6 Доказательство теоремы 2.2.2

Из теоремы 2.2.1 мы получаем, что множество решений Σ не пусто. Следовательно, существует минимизирующая последовательность $(v_l,\theta_l,f_l,g_l) \in \Sigma$ такая, что

$$\lim_{l\to\infty} \Phi(v_l,\theta_l,f_l,g_l) = \inf_{(v,\theta,f,g)\in\Sigma} \Phi(v,f).$$

Как и ранее, используя оценки (2.2.4) и (2.2.11), мы без ограничения общности и в случае необходимости переходя к подпоследовательности, можем предположить, что $v_l \to v_*$ сильно в $L_2(0,T;V)$; $v_l \rightharpoonup v_*$ слабо в $L_2(0,T;V)$; $f_l \to f_* \in F(v_*)$ сильно в $L_2(0,T;V^*)$; $\theta_l \to \theta_*$ сильно в $L_p(0,T;L_p(\Omega))$; $\theta_l \rightharpoonup \theta_*$ слабо в $L_p(0,T;W_p^1(\Omega))$; $g_l \to g_* \in G(\theta_*)$ сильно в $L_1(0,T;W_p^{-1}(\Omega))$ при $m \to +\infty$.

Откуда, также как и в предыдущих доказательствах получим $Av_l \rightharpoonup Av_*$ слабо в $L_2(0,T;V^*)$; $(J+\varkappa A)v_l' \rightharpoonup (J+\varkappa A)v_*'$ слабо в $L_2(0,T;V^*)$; $B(v_l) \to B(v_*)$ слабо в $L_2(0,T;V^*)$; $D(v_l) \rightharpoonup D(v_*)$ слабо в $L_2(0,T;V^*)$ при $m \to +\infty$.

Переходя к пределу в соотношении

$$(J+\varkappa A)v_l' + 2D(v_l) - B(v_l) = f_l \in F(v_l),$$

мы получим, что $(v^*,f^*) \in \Sigma$.

Аналогично переходя к пределу во второй задаче

$$\frac{d(\theta_l,\phi)}{dt} - (\sum_{i=1}^n (v_l)_i\theta_l, \frac{\partial\phi}{\partial x_i}) + \chi(\sum_{i=1}^n \frac{\partial\theta_l}{\partial x_i}, \sum_{i=1}^n \frac{\partial\phi}{\partial x_i})$$

$$-2(\nu(\theta_l)\mathcal{E}(v_l):\mathcal{E}(v_l),\phi) - 2\varkappa(\frac{\partial\mathcal{E}(v_l)}{\partial t}:\mathcal{E}(v_l)(t,x)),\mathcal{E}(\phi)) = \langle g_l,\phi\rangle \in G(\theta_l)$$

мы получим, что $(\theta^*,g^*) \in \Sigma$.

Поскольку функционал Φ полунепрерывен снизу относительно слабой топологии, мы имеем

$$\Phi(v^*,\theta^*,f^*,g^*) \le \inf_{(v,\theta,f,g)\in\Sigma} \Phi(v,\theta,f,g),$$

что доказывает, что (v^*,θ^*,f^*,g^*) — требуемое решение. Это и завершает доказательство теоремы 2.2.2.

2.3 Существование слабых решений термо–модели Кельвина–Фойгта

В данном параграфе рассматривается математическая модель Кельвина–Фойгта. А именно, изучается реологическое соотношение (3) с полной производной и с вязкостью ν зависит от температуры θ. Полученное соотношение подставляется в общее уравнение движения однородной несжимаемой среды с постоянной плотностью (1)–(2) и рассматривается в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, на отрезке времени $[0, T]$, $T > 0$:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - 2\mathrm{Div}(\nu(\theta)\mathcal{E}(v)) - \varkappa \frac{\partial \Delta v}{\partial t} -$$

$$- 2\varkappa \mathrm{Div}\Big(v_i \frac{\partial \mathcal{E}(v)}{\partial x_i}\Big) + \nabla p = f; \quad (2.3.1)$$

$$\mathrm{div}\, v = 0, \quad (t, x) \in Q_T; \quad v|_{t=0} = v_0, \quad x \in \Omega; \quad v|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0; \qquad (2.3.2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} - \chi \Delta\, \theta = 2\nu(\theta)\mathcal{E}(v) : \mathcal{E}(v) + 2\varkappa \frac{\partial \mathcal{E}(v)}{\partial t} : \mathcal{E}(v) + g; \qquad (2.3.3)$$

$$\theta|_{t=0} = \theta_0, \quad x \in \Omega; \qquad \theta|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0. \qquad (2.3.4)$$

2.3.1 Постановка задачи

Введём пространства, в которых будет доказана разрешимость изучаемой задачи:

1. $E_1 = \{v : v \in L_\infty(0, T; V^1),\ v' \in L_2(0, T; V^{-1})\}$, с нормой $\|v\|_{E_1} = \|v\|_{L_\infty(0,T;V^1)} + \|v'\|_{L_2(0,T;V^{-1})}$;
2. $E_2 = \{\theta : \theta \in L_p(0, T; W_p^1(\Omega)), \theta' \in L_1(0, T;\ W_p^{-1}(\Omega)),\ 1 < p < +\infty\}$, с нормой $\|\theta\|_{E_2} = \|\theta\|_{L_p(0,T,W_p^1(\Omega))} + \|\theta'\|_{L_1(0,T;W_p^{-1}(\Omega))}$.

Определение 2.3.1. *Слабым решением задачи* (2.3.1)–(2.3.4) *называется пара* (v, θ), *где* $v \in E_1$ *и* $\theta \in E_2$, *удовлетворяющая соотношениям*

$$\int\limits_\Omega \frac{\partial v}{\partial t} \varphi\, dx - \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx + \varkappa \int\limits_\Omega \mathcal{E}(\frac{\partial v}{\partial t}) : \mathcal{E}(\varphi)\, dx +$$

$$+2 \int\limits_\Omega \nu(\theta)\mathcal{E}(v) : \mathcal{E}(\varphi)\, dx - \varkappa \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^{n} v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx -$$

$$-\varkappa\int\limits_{\Omega}\sum_{i,j,k=1}^{n} v_k\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i\partial x_k}\,dx=\langle f(t),\varphi\rangle$$

$$\textit{при всех } \varphi\in V^3 \textit{ и п.в. } t\in[0,T], \tag{2.3.5}$$

$$\int\limits_{\Omega}\frac{\partial\theta}{\partial t}\phi\,dx-\int\limits_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{n} v_i\theta_j\frac{\partial\phi_j}{\partial x_i}\,dx+\chi\int\limits_{\Omega}\mathcal{E}(\theta):\mathcal{E}(\phi)\,dx=$$

$$=2\int\limits_{\Omega}\big(\nu(\theta)\mathcal{E}(v):\mathcal{E}(v)\big)\phi\,dx+2\varkappa\int\limits_{\Omega}\big(\frac{\partial\mathcal{E}(v)}{\partial t}:\mathcal{E}(v)\big)\phi\,dx+$$

$$+\langle g,\phi\rangle\quad \textit{при всех } \phi\in C_0^\infty(\Omega) \textit{ и п.в. } t\in[0,T], \tag{2.3.6}$$

и начальным условиям $v|_{t=0}=v_0$ *и* $\theta|_{t=0}=\theta_0$.

Основным результатом данного параграфа является следующая теорема
Теорема 2.3.1. *Пусть функция* $\nu(\theta)\in C^2(-\infty,+\infty)$ *и* $0<\nu(\theta)\le M$, $f\in L_2(0,T;V^{-1})$, $g\in L_1(0,T;L_1(\Omega))$, $v_0\in V^1$, $\theta_0\in W_p^{1-2/p}(\Omega)$. *Тогда при* $1<p<4/3$ *для* $n=2$ *и при* $1<p<10/9$ *для* $n=3$ *существует слабое решение задачи* (2.3.1)–(2.3.4).

Доказательство теоремы 2.3.1 проводится поэтапно. На первом этапе устанавливается разрешимость задачи (2.3.1)–(2.3.2) с известной $\theta\in E_2$. Затем устанавливается разрешимость задачи (2.3.3)–(2.3.4) с заданной $v\in E_1$ (см. раздел 2.1.3). Далее, описывается итерационный процесс, состоящий в последовательном решении вышеприведенных задач, и, наконец, доказывается сходимость последовательных приближений к решению задачи (2.3.1)–(2.3.4). В силу того, что второй этап, итерационный процесс и предельный переход в какой-то мере повторяет рассуждения первого этапа и параграфов 2.1.3–2.1.5, повторять эти рассуждения не будем. Но подробно опишем доказательство первого этапа.

Отметим, что существование оптимального управления с обратной связью для термо–модели Кельвина–Фойгта было установлено в работе [29].

2.3.2 Доказательство разрешимости начально–краевой задачи (2.3.1)–(2.3.2)

Рассмотрим начально–краевую задачу (2.3.1)–(2.3.2) при фиксированной $\theta\in E_2$.

Слабое решение задачи (2.3.1)–(2.3.2) определим как функцию $v \in E_1$, удовлетворяющую (2.3.5) и начальному условию $v|_{t=0} = v_0$.

Теорема 2.3.2. *Пусть функция* $\nu(\theta) \in C^2(-\infty, +\infty)$ *и* $0 < \nu(\theta) \leq M$, $f \in L_2(0, T; V^{-1})$, $v_0 \in V^1$, $\theta \in E_2$. *Тогда задача* (2.3.1)–(2.3.2) *имеет по крайней мере одно слабое решение* $v \in E_1$, *для которого справедлива оценка*

$$\|v\|_{E_1} \leqslant R_1, \quad R_1 = R_1(T, \|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}, \|v_0\|_{V^1}). \tag{2.3.7}$$

Для доказательства Теоремы 2.3.2 будет использоваться аппроксимационно–топологический подход к исследованию задач гидродинамики. Для этого введём пространство, в котором будет доказана разрешимость вспомогательной задачи:

$$\overline{E_1} = \{v : v \in C([0, T]; V^3),\ v' \in L_2(0, T; V^3)\},$$

с нормой $\|v\|_{\overline{E_1}} = \|v\|_{C([0,T];V^3)} + \|v'\|_{L_2(0,T;V^3)}$, и рассмотрим следующую аппроксимационную задачу с малым параметром $\varepsilon > 0$:

Задача 2.3.1. *Пусть* $f \in L_2(0, T; V^{-1}), v_0 \in V^3$, $\theta \in E_2$. *Найти функцию* $v \in \overline{E_1}$, *удовлетворяющую для любого* $\varphi \in V^3$ *и почти всех* $t \in (0, T)$ *равенству*

$$\int\limits_\Omega \frac{\partial v}{\partial t}\varphi\, dx - \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx + \varkappa \int\limits_\Omega \mathcal{E}(\frac{\partial v}{\partial t}) : \mathcal{E}(\varphi)\, dx + 2\int\limits_\Omega \nu(\theta)\mathcal{E}(v) : \mathcal{E}(\varphi)\, dx +$$
$$+ \varepsilon \int\limits_\Omega \nabla(\Delta(\frac{\partial v}{\partial t})) : \nabla(\Delta\varphi)\, dx - \varkappa \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx -$$
$$- \varkappa \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx = \langle f, \varphi\rangle \tag{2.3.8}$$

и начальному условию $v(0) = v_0$.

Далее будет доказано существование решений вспомогательной задачи и показано, что из последовательности её решений можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к слабому решению начально–краевой задачи (2.3.1)–(2.3.2) с фиксированной $\theta \in E_2$ при стремлении параметра аппроксимации ε к нулю. Для этого перейдем к операторной трактовке задачи 2.3.1. Определим операторы с помощью следующих равенств:

$$N : V^3 \to V^{-3}, \quad \langle Nv, \varphi\rangle = \int\limits_\Omega \nabla(\Delta v) : \nabla(\Delta\varphi)\, dx, \quad v, \varphi \in V^3;$$

$$A_1 : V^1 \to V^{-1}, \quad \langle A_1 v, \varphi \rangle = \int\limits_\Omega \nu(\theta)\mathcal{E}(v) : \mathcal{E}(\varphi)\, dx, \quad v, \varphi \in V^1;$$

$$B_1 : L_4(\Omega) \to V^{-1}, \quad \langle B_1(v), \varphi \rangle = \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx, \quad v \in L_4(\Omega),\, \varphi \in V^1;$$

$$B_2 : V^1 \to V^{-3}, \quad \langle B_2(v), \varphi \rangle = \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx, \quad v \in V^1,\, \varphi \in V^3;$$

$$B_3 : V^1 \to V^{-3}, \quad \langle B_3(v), \varphi \rangle = \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx, \quad v \in V^1,\, \varphi \in V^3;$$

$$J : V^3 \to V^{-3}, \quad \langle Jv, \varphi \rangle = \int\limits_\Omega v\varphi\, dx, \quad v, \varphi \in V^3.$$

Поскольку в (2.3.8) функция $\varphi \in V^3$ произвольна, то оно эквивалентно в $L_2(0,T;V^{-3})$ следующему операторному уравнению:

$$Jv' + \varkappa A v' + \varepsilon N v' + 2A_1 v - B_1(v) - \varkappa B_2(v) - \varkappa B_3(v) = f. \qquad (2.3.9)$$

Таким образом, слабое решение вспомогательной задачи — это решение $v \in \overline{E_1}$ операторного уравнения (2.3.9), удовлетворяющее начальному условию $v(0) = v_0$.

Также введём операторы при помощи следующих равенств:

$$L : \overline{E_1} \to L_2(0,T;V^{-3}) \times V^3, \quad L(v) = ((J + \varkappa A + \varepsilon N)v', v|_{t=0});$$
$$K : \overline{E_1} \to L_2(0,T;V^{-3}) \times V^3, \quad K(v) = (2A_1 v - B_1(v) - \varkappa B_2(v) - \varkappa B_3(v), 0)\,.$$

Тогда задача о нахождении решений вспомогательной задачи, удовлетворяющих начальному условию $v(0) = v_0$, эквивалентна задаче о нахождении решений следующего операторного уравнения

$$L(v) + K(v) = (f, v_0). \qquad (2.3.10)$$

Для доказательства разрешимости вспомогательной задачи воспользуемся следующей леммой:

Лемма 2.3.1. *Для операторов L и K имеют место следующие свойства:*

1. *Оператор $L : \overline{E_1} \to L_2(0,T;V^{-3}) \times V^3$ — обратим и обратный оператор непрерывен.*

2. Оператор $K : \overline{E_1} \to L_2(0,T;V^{-3}) \times V^3$ *— вполне непрерывен.*

Доказательство данной леммы основано на результатах приведенных в пункте 1.1.3 и пункте 1.2.2.

Вместе с уравнением (2.3.10) будем рассматривать следующее семейство операторных уравнений

$$L(v) + \lambda K(v) = \lambda(f, v_0), \quad \lambda \in [0,1], \tag{2.3.11}$$

которое совпадает с (2.3.10) при $\lambda = 1$.

Теорема 2.3.3. *Если* v *— решение операторного уравнения* (2.3.10) *для некоторого* $\lambda \in [0,1]$, *то для него имеет место следующая оценка:*

$$\|v\|_{\overline{E_1}} \leqslant C_1 = \sqrt{\frac{C_2}{\varepsilon} + 2\|v_0\|^2_{V^3}} + \frac{C_3}{\varepsilon}. \tag{2.3.12}$$

Доказательство данный теоремы приведено в пункте 1.2.3 (см. Следствие 1.2.1).

Теорема 2.3.4. *Операторное уравнение* (2.3.10) *имеет хотя бы одно решение* $v \in \overline{E_1}$.

Доказательство. Для доказательства данной теоремы воспользуемся теорией топологической степени Лере–Шаудера для вполне непрерывных векторных полей.

В силу априорной оценки (2.3.12) все решения семейства уравнений (2.3.11):

$$L(v) + \lambda K(v) = \lambda(f, v_0), \quad \text{где} \quad \lambda \in [0,1],$$

лежат в шаре $B_R \subset \overline{E_1}$ радиуса $R = C_1 + 1$ с центром в нуле. И, следовательно, все решения семейства уравнений

$$v - \lambda L^{-1}\left[-K(v) + (f, v_0)\right] = 0, \quad \text{где} \quad \lambda \in [0,1],$$

лежат в том же шаре B_R.

В силу второго пункта леммы 2.3.1 отображение $[-K(\cdot) + (f, v_0)] : \overline{E_1} \to L_2(0,T;V^{-3}) \times V^3$ является вполне непрерывным.

В силу первого пункта той же леммы оператор $L^{-1} : L_2(0,T;V^{-3}) \times V^3 \to \overline{E_1}$ непрерывен.

Таким образом отображение $L^{-1}\left[-K(\cdot)+(f,a)\right]:\overline{E_1}\to\overline{E_1}$ вполне непрерывно. Тогда отображение

$$G:[0,1]\times\overline{E_1}\to\overline{E_1},\quad G(\lambda,v)=\lambda L^{-1}\left[-K(v)+(f,v_0)\right]$$

вполне непрерывно по совокупности переменных λ и v.

Из вышесказанного имеем, что вполне непрерывное векторное поле $\Phi(\lambda,v)=v-G(\lambda,v)$ невырождено на границе шара B_R. Следовательно, для него определена степень Лере–Шаудера $\deg_{LS}(\Phi,B_R,0)$. По свойству гомотопической инвариантности степени получим, что

$$\deg_{LS}(\Phi(0,\cdot),B_R,0)=\deg_{LS}(\Phi(1,\cdot),B_R,0).$$

Вспомним, что $\Phi(0,\cdot)=I$ и по условию нормировки:

$$\deg_{LS}(I,B_R,0)=1.$$

Отсюда,

$$\deg_{LS}(\Phi(1,\cdot),B_R,0)=1.$$

Таким образом получили, что существует хотя бы одно решение $v\in\overline{E_1}$ уравнения

$$v-L^{-1}\left[-K(v)+(f,v_0)\right]=0$$

и, следовательно, уравнения (2.3.10). □

Поскольку существует решение $v\in\overline{E_1}$ уравнения (2.3.10), то из вышеприведенных рассуждений следует, то аппроксимационная задача имеет хотя бы одно решение $v\in\overline{E_1}$.

Доказательство теоремы 2.3.2. Поскольку, пространство V^3 плотно в V^1, то для каждого $v_0\in V^1$ существует последовательность $v_0^m\in V^3$, сходящаяся к v_0 в V^1. Если $v_0\equiv 0$, то положим $v_0^m\equiv 0$, $\quad\varepsilon_m=\dfrac{1}{m}$. Если же $\|v_0\|_{V^1}\neq 0$, то начиная с некоторого номера $\|v_0^m\|_{V^3}\neq 0$. Тогда положим

$$\varepsilon_m=\frac{1}{m\|v_0^m\|_{V^3}^2}.$$

В силу нашего выбора полученная последовательность $\{\varepsilon_m\}$ сходится к нулю при $m\to+\infty$. Причём имеет место неравенство

$$\varepsilon_m\|v_0^m\|_{V^3}^2\leqslant 1.$$

В силу теоремы 2.3.4 при каждом ε_m и v_0^m существует $v_m \in E_1 \subset \overline{E_1}$ — решение аппроксимационной задачи. Таким образом каждое v_m удовлетворяет для всех $\varphi \in V^3$ при почти всех $t \in (0,T)$ равенству

$$\int\limits_\Omega v_m'\varphi\,dx - \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n (v_m)_i(v_m)_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\,dx + 2\int\limits_\Omega \nu(\theta)\nabla v_m : \nabla\varphi\,dx +$$
$$+\varepsilon_m \int\limits_\Omega \nabla\left(\Delta v_m'\right) : \nabla\left(\Delta\varphi\right)\,dx + \varkappa\int\limits_\Omega \nabla v_m' : \nabla\varphi\,dx -$$
$$-\varkappa\int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n (v_m)_k \frac{\partial (v_m)_i}{\partial x_j}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i\partial x_k}\,dx - \varkappa\int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n (v_m)_k \frac{\partial (v_m)_j}{\partial x_i}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i\partial x_k}\,dx =$$
$$= \int\limits_\Omega f\varphi\,dx. \tag{2.3.13}$$

и начальному условию:

$$v_m\Big|_{t=0}(x) = v_0^m(x), \quad x \in \Omega. \tag{2.3.14}$$

Аналогично рассуждениям, проведенным в предельном переходе пункта 1.2.5, получим:

$$v_m \rightharpoonup v_* \quad \text{слабо в } L_2(0,T;V^1) \quad \text{при } m \to +\infty;$$
$$v_m \rightharpoonup v_* \quad {}^*\text{-слабо в } L_\infty(0,T;V^1) \quad \text{при } m \to +\infty;$$
$$v_m' \rightharpoonup v_*' \quad \text{слабо в } L_2(0,T;V^{-1}) \quad \text{при } m \to +\infty;$$
$$v_m \to v_*, \quad \text{сильно в } C([0,T],L_4(\Omega)) \quad \text{при } m \to +\infty.$$

Тогда при $m \to +\infty$ в силу определения слабой сходимости

$$\int\limits_\Omega \nu(\theta)\nabla v_m : \nabla\varphi\,dx \to \int\limits_\Omega \nu(\theta)\nabla v_* : \nabla\varphi\,dx \quad \text{для любого } \varphi \in V^3.$$

Поскольку линейный оператор переводит слабо сходящуюся последовательность в слабо сходящуюся, то при $m \to +\infty$ получим что

$$\int\limits_\Omega v_m'\varphi\,dx + \varkappa\int\limits_\Omega \nabla v_m' : \nabla\varphi\,dx = \langle (J+\varkappa A)v_m', \varphi\rangle \to \langle (J+\varkappa A)v_*', \varphi\rangle =$$
$$= \frac{d}{dt}\int\limits_\Omega v_*\varphi\,dx + \varkappa\frac{d}{dt}\int\limits_\Omega \nabla v_* : \nabla\varphi\,dx.$$

Далее, в силу единственности слабого предела

$$\varepsilon_m \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \nabla\left(\Delta v_m'\right) : \nabla\left(\Delta\varphi\right)\, dx\, dt \to 0 \quad \text{при } m \to +\infty.$$

А также получим, что

$$\int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n (v_m)_i (v_m)_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx \to \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n (v_*)_i (v_*)_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx \quad \text{при } m \to +\infty.$$

В силу того, что v_m сходится к v_* сильно в $C([0,T], L_4(\Omega))$, а $\nabla(v_m)$ сходится к ∇v_* слабо в $L_4(0,T; L_2(\Omega))$, их произведение сходится слабо к произведению пределов. Следовательно в следующих интегралах имеем

$$\varkappa \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n (v_m)_k \frac{\partial (v_m)_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx \to \varkappa \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n (v_*)_k \frac{\partial (v_*)_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx;$$
$$\varkappa \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n (v_m)_k \frac{\partial (v_m)_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx \to \varkappa \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n (v_*)_k \frac{\partial (v_*)_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx.$$

Таким образом переходя в равенстве (2.3.13) к пределу при $m \to +\infty$ получим, что предельная функция v_* удовлетворяет следующему равенству:

$$\left\langle (J + \varkappa A)\frac{\partial v_*}{\partial t}, \varphi \right\rangle - \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n (v_*)_i (v_*)_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx + \int\limits_\Omega \nu(\theta) \nabla v_* : \nabla \varphi\, dx -$$
$$-\varkappa \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n (v_*)_k \frac{\partial (v_*)_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx - \varkappa \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n (v_*)_k \frac{\partial (v_*)_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx = \int\limits_\Omega f\varphi\, dx.$$

В силу сильной сходимости $C([0,T], L_4(\Omega))$ получаем, что v_m сходится к v_* поточечно на $[0,T]$. Отсюда, переходя в (2.3.14) к пределу при $m \to +\infty$ в силу выбора v_0^m имеем, что v_* удовлетворяет следующему начальному условию: $v_*|_{t=0} = v_0$. Так как для последовательности $\{v_m\}$ имеет место априорная оценка (2.3.12), то для v_* непосредственно получаем оценку:

$$\|v_*\|_{L_\infty(0,T;V^1)} + \|v_*'\|_{L_2(0,T;V^{-1})} \leqslant R_1, \quad R_1 = R_1(T, \|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}, \|v_0\|_{V^1}).$$

Отсюда получаем, что $v_* \in E_1$, что и завершает доказательство теоремы 2.3.2. $\square$

2.3.3 Построение последовательных приближений

Рассмотрим последовательность $(v^n, \theta^n), n = 0, 1, 2, \ldots,$ определяемую следующим образом. Пусть v^0 и θ^0 означают начальные значения v_0 и θ_0 для v и θ из (2.3.2) и (2.3.4). Пусть (v^n, θ^n) известны. Тогда вначале находится v^{n+1} как слабое решение задачи

$$\frac{\partial v^{n+1}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i^{n+1} \frac{\partial v^{n+1}}{\partial x_i} - 2\mathrm{Div}(\nu(\theta^n)\mathcal{E}(v^{n+1})) - \varkappa \frac{\partial \Delta v^{n+1}}{\partial t} -$$

$$-2\varkappa \mathrm{Div}\Big(v_i^{n+1} \frac{\partial \mathcal{E}(v^{n+1})}{\partial x_i}\Big) + \nabla p = f, \quad (t,x) \in Q_T; \tag{2.3.15}$$

$$\mathrm{div}\; v^{n+1} = 0, \quad (t,x) \in Q_T; \tag{2.3.16}$$

$$v|_{t=0} = v_0, \quad x \in \Omega; \quad v^{n+1}|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0, \tag{2.3.17}$$

затем, при найденном v^{n+1} находится θ^{n+1} как слабое решение задачи

$$\frac{\partial \theta^{n+1}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i^{n+1} \frac{\partial \theta^{n+1}}{\partial x_i} - \chi \triangle\, \theta^{n+1} = 2\nu(\theta^n)\mathcal{E}(v^{n+1}) : \mathcal{E}(v^{n+1}) +$$

$$+2\varkappa \frac{\partial \mathcal{E}(v^{n+1})}{\partial t} : \mathcal{E}(v^{n+1}) + g, \quad (t,x) \in Q_T; \tag{2.3.18}$$

$$\theta^{n+1}|_{t=0} = \theta_0, \quad x \in \Omega; \quad \theta^{n+1}|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0. \tag{2.3.19}$$

Разрешимость задачи (2.3.15)–(2.3.17) следует из теоремы 2.3.2. При найденной функции v^{n+1} выполнены все требования теоремы 2.1.6. Отсюда следует, что задача (2.3.18)–(2.3.19) также разрешима.

2.3.4 Предельный переход

Рассмотрим теперь последовательность (v^n, θ^n), $n = 1, 2, \ldots,$ где v^n — решение задачи (2.3.15)–(2.3.17), а θ^n — решение задачи (2.3.18)–(2.3.19).

Аналогично предельным переходам при доказательстве теорем 2.1.2 и 2.3.2 получим следующие сходимости. Последовательность θ^n сходится к θ п.в. в $L_p(Q_T)$, где p удовлетворяет условиям теоремы 2.3.1. В силу оценки (2.3.7) получаем, что v^n слабо сходится к v в $L_2(0,T;V^1)$, а $\dfrac{\partial v^n}{\partial t}$ слабо сходится в $L_2(0,T;V^{-1})$. Из теоремы 1.1.5 вытекает вполне непрерывное вложение $F = \{v : v \in C([0,T],V);\ v' \in L_2(0,T;V)\} \subset C([0,T], L_4(\Omega))$. Отсюда, учитывая априорные оценки, получаем (при необходимости переходя к подпоследовательностям), что $v_n \to v$ сильно в $C([0,T], L_4(\Omega))$. Таким образом, v_n сходится к v сильно в $C([0,T], L_4(\Omega))$, а $\nabla(v_n)$ сходится к ∇v слабо в $L_2(0,T; L_2(\Omega))$. Аналогично теореме 2.1.7 получаем, что последовательность v^n сильно сходится в $L_2(0,T;V^1)$ к v.

В силу получившихся сходимостей в равенствах

$$\int\limits_\Omega (v^n)'(t)\,\varphi\,dx - \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i^n(t)v_j^n(t)\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx + 2\int\limits_\Omega \nu(\theta^{n-1})\mathcal{E}(v^n(t)) : \nabla\varphi\,dx +$$

$$+\varkappa\int\limits_\Omega \nabla(v^n)'(t) : \nabla\varphi\,dx - \varkappa\int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k^n\frac{\partial v_i^n}{\partial x_j}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i\partial x_k}\,dx -$$

$$-\varkappa\int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k^n\frac{\partial v_j^n}{\partial x_i}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i\partial x_k}\,dx = \int\limits_\Omega f(t)\varphi\,dx$$

$$\frac{d(\theta^n,\phi)}{dt} - (\sum_{i=1}^n v_i^n\theta^n, \frac{\partial\phi}{\partial x_i}) + \chi(\frac{\partial\theta^n}{\partial x_i}, \frac{\partial\phi}{\partial x_i}) = \langle g,\phi\rangle +$$

$$+2(\nu(\theta^{n-1})\mathcal{E}(v^n) : \mathcal{E}(v^n),\phi) + 2\varkappa(\frac{\partial\mathcal{E}(v^n)}{\partial t} : \mathcal{E}(v^n), \mathcal{E}(\phi))$$

можно перейти к приделу. Таким образом, получим пару функций $v \in E_1$ и $\theta \in E_2$, удовлетворяющих равенствам (2.3.5) и (2.3.6). Это и завершает доказательство Теоремы 2.3.1.

2.4 Существование слабых решений термо–модели, удовлетворяющей принципу объективности

В данном параграфе рассматривается математическая модель с реологическим соотношением, удовлетворяющим принципу объективности. А именно, изучается реологическое соотношение (3) со сглаженной объективной производной Яуманна (6) и с вязкостью ν зависит от температуры θ. Полученное соотношение подставляется в общее уравнение движения однородной несжимаемой среды с постоянной плотностью (1)–(2) и рассматривается в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, на отрезке времени $[0, T]$, $T > 0$:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - 2\mathrm{Div}\big(\nu(\theta)\mathcal{E}(v)\big) - \varkappa\frac{\partial \Delta v}{\partial t} - 2\varkappa \mathrm{Div}\Big(v_i \frac{\partial \mathcal{E}(v)}{\partial x_i}\Big) -$$

$$-2\varkappa\mathrm{Div}\big(\mathcal{E}(v)W_\rho(v) - W_\rho(v)\mathcal{E}(v)\big) + \mathrm{grad}\; p = f; \tag{2.4.1}$$

$$\mathrm{div}\; v = 0, \quad (t,x) \in Q_T; \tag{2.4.2}$$

$$v|_{t=0} = v_0, \quad x \in \Omega; \qquad v|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0; \tag{2.4.3}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} - \chi\Delta\,\theta = 2\nu(\theta)\mathcal{E}(v) : \mathcal{E}(v) + 2\varkappa\frac{\partial \mathcal{E}(v)}{\partial t} : \mathcal{E}(v) + g; \tag{2.4.4}$$

$$\theta|_{t=0} = \theta_0, \quad x \in \Omega; \qquad \theta|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0. \tag{2.4.5}$$

2.4.1 Постановка задачи

Введём пространства, в которых будет доказана разрешимость изучаемой задачи:

1. $E_1 = \{v : v \in L_\infty(0,T;V^1),\ v' \in L_2(0,T;V^{-1})\}$,
   с нормой $\|v\|_{E_1} = \|v\|_{L_\infty(0,T;V^1)} + \|v'\|_{L_2(0,T;V^{-1})}$;
2. $E_2 = \{\theta : \theta \in L_p(0,T;W_p^1(\Omega)), \theta' \in L_1(0,T;\ W_p^{-1}(\Omega)),\ 1 < p < +\infty\}$,
   с нормой $\|\theta\|_{E_2} = \|\theta\|_{L_p(0,T,W_p^1(\Omega))} + \|\theta'\|_{L_1(0,T;W_p^{-1}(\Omega))}$.

Определение 2.4.1. *Слабым решением задачи* (2.4.1)–(2.4.5) *называется пара* (v, θ), *где* $v \in E_1$ *и* $\theta \in E_2$, *удовлетворяющая при п.в.* $t \in [0, T]$ *соотношениям*

$$\int\limits_\Omega \frac{\partial v}{\partial t}\varphi\, dx - \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx + \varkappa\int\limits_\Omega \mathcal{E}\Big(\frac{\partial v}{\partial t}\Big) : \mathcal{E}(\varphi)\, dx +$$

$$+2\int\limits_{\Omega}\nu(\theta)\mathcal{E}(v):\mathcal{E}(\varphi)\,dx-\varkappa\int\limits_{\Omega}\sum_{i,j,k=1}^{n}v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i\partial x_k}\,dx-$$

$$-\varkappa\int\limits_{\Omega}\sum_{i,j,k=1}^{n}v_k\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i\partial x_k}\,dx+2\varkappa\int\limits_{\Omega}\Big(\mathcal{E}(v)W_\rho(v)-W_\rho(v)\mathcal{E}(v)\Big):\nabla\varphi\,dx=$$

$$=\langle f(t),\varphi\rangle\quad \textit{при всех } \varphi\in V^3, \tag{2.4.6}$$

$$\int\limits_{\Omega}\frac{\partial\theta}{\partial t}\phi\,dx-\int\limits_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{n}v_i\theta_j\frac{\partial\phi_j}{\partial x_i}\,dx+\chi\int\limits_{\Omega}\mathcal{E}(\theta):\mathcal{E}(\phi)\,dx=$$

$$=2\int\limits_{\Omega}\big(\nu(\theta)\mathcal{E}(v):\mathcal{E}(v)\big)\phi\,dx+2\varkappa\int\limits_{\Omega}\big(\frac{\partial\mathcal{E}(v)}{\partial t}:\mathcal{E}(v)\big)\phi\,dx+$$

$$+\langle g,\phi\rangle\quad \textit{при всех } \phi\in C_0^\infty(\Omega), \tag{2.4.7}$$

и начальным условиям $v|_{t=0}=v_0$ *и* $\theta|_{t=0}=\theta_0$.

Основным результатом данного параграфа является следующая теорема

Теорема 2.4.1. *Пусть функция* $\nu(\theta)\in C^2(-\infty,+\infty)$ *и* $0<\nu(\theta)\le M$, $f\in L_2(0,T;\,V^{-1})$, $g\in L_1(0,T;L_1(\Omega))$, $v_0\in V^1$, $\theta_0\in W_p^{1-2/p}(\Omega)$. *Тогда при* $1<p<4/3$ *для* $n=2$ *и при* $1<p<10/9$ *для* $n=3$ *существует слабое решение задачи* (2.4.1)–(2.4.5).

Доказательство теоремы 2.4.1 проводится поэтапно. На первом этапе устанавливается разрешимость задачи (2.4.1)–(2.4.3) с известной $\theta\in E_2$. Затем устанавливается разрешимость задачи (2.4.4)–(2.4.5) с заданной $v\in E_1$ (см. раздел 2.1.3). Далее, описывается итерационный процесс, состоящий в последовательном решении вышеприведенных задач, и, наконец, доказывается сходимость последовательных приближений к решению задачи (2.4.1)–(2.4.5). В силу того, что второй этап, итерационный процесс и предельный переход в какой-то мере повторяет рассуждения первого этапа и параграфов 2.1.3–2.1.5, повторять эти рассуждения не будем. Но подробно опишем доказательство первого этапа.

Отметим, что существование оптимального управления с обратной связью для термо–модели с реологическим соотношением, удовлетворяющим принципу объективности, было установлено в работе [21].

2.4.2 Доказательство разрешимости начально–краевой задачи (2.4.1)–(2.4.3)

Рассмотрим начально–краевую задачу (2.4.1)–(2.4.3) при фиксированной $\theta \in E_2$. Слабое решение задачи (2.4.1)–(2.4.3) определим как функцию $v \in E_1$, удовлетворяющую (2.4.6) и начальному условию $v|_{t=0} = v_0$.

Теорема 2.4.2. *Пусть функция $\nu(\theta) \in C^2(-\infty, +\infty)$ и $0 < \nu(\theta) \leq M$, $f \in L_2(0, T;\ V^{-1})$, $v_0 \in V^1$, $\theta \in E_2$. Тогда задача* (2.4.1)–(2.4.3) *имеет по крайней мере одно слабое решение $v \in E_1$, для которого справедлива оценка*

$$\|v\|_{E_1} \leqslant R_1, \quad R_1 = R_1(T, \|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}, \|v_0\|_{V^1}). \tag{2.4.8}$$

Для доказательства теоремы 2.4.2 будет использоваться аппроксимационно–топологический подход к исследованию задач гидродинамики. Для этого введём пространство, в котором будет доказана разрешимость вспомогательной задачи:

$$\overline{E}_1 = \{v : v \in C([0, T]; V^3),\ v' \in L_2(0, T; V^3)\},$$

$$\text{с нормой } \|v\|_{\overline{E}_1} = \|v\|_{C([0,T];V^3)} + \|v'\|_{L_2(0,T;V^3)},$$

и рассмотрим следующую аппроксимационную задачу с малым параметром $\varepsilon > 0$:

Задача 2.4.1. *Пусть $f \in L_2(0, T; V^{-1}), v_0 \in V^3$. Найти функцию $v \in \overline{E}_1$, удовлетворяющую начальному условию $v(0) = v_0$ и для любого $\varphi \in V^3$ и почти всех $t \in (0, T)$ равенству*

$$\int\limits_\Omega \frac{\partial v}{\partial t}\varphi\, dx - \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx + \varkappa \int\limits_\Omega \mathcal{E}(\frac{\partial v}{\partial t}) : \mathcal{E}(\varphi)\, dx +$$
$$+2 \int\limits_\Omega \nu(\theta)\mathcal{E}(v) : \mathcal{E}(\varphi)\, dx + \varepsilon \int\limits_\Omega \nabla\Delta(\frac{\partial v}{\partial t}) : \nabla\Delta\varphi\, dx +$$
$$+2\varkappa \int\limits_\Omega \Big(\mathcal{E}(v)W_\rho(v) - W_\rho(v)\mathcal{E}(v)\Big) : \nabla\varphi\, dx -$$
$$-\varkappa \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx - \varkappa \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx = \langle f, \varphi\rangle. \tag{2.4.9}$$

Далее будет доказано существование решений вспомогательной задачи и показано, что из последовательности её решений можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к слабому решению начально–краевой задачи (2.4.1)–(2.4.3) с фиксированной $\theta \in E_2$ при стремлении параметра аппроксимации ε к нулю. Для этого перейдем к операторной трактовке задачи 2.4.1. Определим операторы $A, N, B_1, B_2, B_3, D, J$ аналогично пункту 1.2.2 и оператор A_1 аналогично пункту 2.3.2. Поскольку в (2.4.9) функция $\varphi \in V^3$ произвольна, то оно эквивалентно в $L_2(0,T;V^{-3})$ следующему операторному уравнению:

$$Jv' + \varkappa Av' + \varepsilon Nv' + 2A_1v - B_1(v) - \varkappa B_2(v) - \varkappa B_3(v) + 2\varkappa D(v) = f. \tag{2.4.10}$$

Таким образом, слабое решение вспомогательной задачи — это решение $v \in \overline{E}_1$ операторного уравнения (2.4.10), удовлетворяющее начальному условию $v(0) = v_0$.

Также введём операторы при помощи следующих равенств:

$$L : \overline{E}_1 \to L_2(0,T;V^{-3}) \times V^3, \quad L(v) = ((J + \varkappa A + \varepsilon N)v', v|_{t=0});$$
$$K : \overline{E}_1 \to L_2(0,T;V^{-3}) \times V^3,$$
$$K(v) = (2A_1v - B_1(v) - \varkappa B_2(v) - \varkappa B_3(v) + 2\varkappa D(v), 0).$$

Тогда задача о нахождении решений вспомогательной задачи, удовлетворяющих начальному условию $v(0) = v_0$, эквивалентна задаче о нахождении решений следующего операторного уравнения

$$L(v) + K(v) = (f, v_0). \tag{2.4.11}$$

Для доказательства разрешимости вспомогательной задачи воспользуемся следующей леммой:

Лемма 2.4.1. *Для операторов L и K имеют место следующие свойства:*

1. *Оператор $L : \overline{E}_1 \to L_2(0,T;V^{-3}) \times V^3$ — обратим и обратный оператор непрерывен.*
2. *Оператор $K : \overline{E}_1 \to L_2(0,T;V^{-3}) \times V^3$ — вполне непрерывен.*

Доказательство данной леммы основано на результатах приведенных в пункте 1.1.3 и пункте 1.2.2.

Вместе с уравнением (2.4.11) будем рассматривать следующее семейство операторных уравнений

$$L(v) + \lambda K(v) = \lambda(f, v_0), \quad \lambda \in [0,1], \tag{2.4.12}$$

которое совпадает с (2.4.11) при $\lambda = 1$.

Теорема 2.4.3. *Если $v \in \overline{E}_1$ — решение операторного уравнения* (2.4.12) *для некоторого $\lambda \in [0,1]$, то для него имеют место следующая оценка:*

$$\|v\|_{\overline{E}_1} \leqslant C_1 = \sqrt{\frac{C_2}{\varepsilon} + 2\|v_0\|^2_{V^3}} + \frac{C_3}{\varepsilon}. \tag{2.4.13}$$

Доказательство данный теоремы приведено в пункте 1.2.3.

На основе полученной в теореме 2.4.3 априорной оценке докажем слабую разрешимость задачи 2.4.1.

Теорема 2.4.4. *Операторное уравнение* (2.4.11) *имеет хотя бы одно решение $v \in \overline{E}_1$.*

Доказательство. Для доказательства данной теоремы воспользуемся теорией топологической степени Лере–Шаудера для вполне непрерывных векторных полей. В силу полученной априорной оценки (2.4.13) все решения семейства уравнений (2.4.12) лежат в шаре $B_R \subset \overline{E}_1$ радиуса $R = C_1 + 1$ с центром в нуле. И, следовательно, все решения семейства уравнений $v - \lambda L^{-1}\left[-K(v) + (f, v_0)\right] = 0, \quad$ где $\quad \lambda \in [0,1]$, лежат в том же шаре B_R.

В силу второго пункта леммы 2.4.1 отображение $\left[-K(\cdot) + (f, v_0)\right] : \overline{E}_1 \to L_2(0,T; V^{-3}) \times V^3$ является вполне непрерывным. В силу первого пункта той же леммы оператор $L^{-1} : L_2(0,T; V^{-3}) \times V^3 \to \overline{E}_1$ непрерывен.

Таким образом отображение $L^{-1}\left[-K(\cdot) + (f, v_0)\right] : \overline{E}_1 \to \overline{E}_1$ вполне непрерывно. Тогда отображение $G : [0,1] \times \overline{E}_1 \to \overline{E}_1$, $G(\lambda, v) = \lambda L^{-1}\left[-K(v) + (f, v_0)\right]$ вполне непрерывно по совокупности переменных λ и v.

Из вышесказанного имеем, что вполне непрерывное векторное поле $\Phi(\lambda, v) = v - G(\lambda, v)$ невырождено на границе шара B_R. Следовательно, для него определена степень Лере–Шаудера $\deg_{LS}(\Phi, B_R, 0)$. По свойству гомотопической инвариантности степени получим, что $\deg_{LS}(\Phi(0,\cdot), B_R, 0) =$

$\deg_{LS}(\Phi(1,\cdot), B_R, 0)$. Вспомним, что $\Phi(0,\cdot) = I$ и по условию нормировки: $\deg_{LS}(I, B_R, 0) = 1$. Отсюда, $\deg_{LS}(\Phi(1,\cdot), B_R, 0) = 1$.

Таким образом получили, что существует хотя бы одно решение $v \in \overline{E}_1$ уравнения

$$v - L^{-1}\left[-K(v) + (f, v_0)\right] = 0$$

и, следовательно, уравнения (2.4.11). □

Поскольку существует решение $v \in \overline{E}_1$ уравнения (2.4.11), то из вышеприведенных рассуждений следует, то задача 2.4.1 имеет хотя бы одно решение $v \in \overline{E}_1$.

Доказательство теоремы 2.4.2. Поскольку, пространство V^3 плотно в V^1, то для каждого $v_0^* \in V^1$ существует последовательность $v_0^m \in V^3$, сходящаяся к v_0^* в V^1. Если $v_0^* \equiv 0$, то положим $v_0^m \equiv 0, \varepsilon_m = \frac{1}{m}$. Если же $\|v_0^*\|_{V^1} \neq 0$, то начиная с некоторого номера $\|v_0^m\|_{V^3} \neq 0$. Тогда положим $\varepsilon_m = \frac{1}{m\|v_0^m\|^2_{V^3}}$.

В силу нашего выбора полученная последовательность $\{\varepsilon_m\}$ сходится к нулю при $m \to +\infty$. Причём имеет место неравенство

$$\varepsilon_m \|v_0^m\|^2_{V^3} \leqslant 1.$$

В силу теоремы 2.4.4 при каждом ε_m и v_0^m существует $v_m \in \overline{E}_1 \subset E_1$ — решение задачи 2.4.1. Таким образом каждое v_m удовлетворяет для всех $\varphi \in V^3$ при почти всех $t \in (0,T)$ равенству

$$\int\limits_\Omega v_m'\varphi\,dx - \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n (v_m)_i(v_m)_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\,dx + 2\int\limits_\Omega \nu(\theta)\nabla v_m : \nabla\varphi\,dx +$$
$$+\varkappa \int\limits_\Omega \nabla v_m' : \nabla\varphi\,dx + +\varepsilon_m \int\limits_\Omega \nabla\left(\Delta v_m'\right) : \nabla\left(\Delta\varphi\right)\,dx -$$
$$-\varkappa \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n (v_m)_k \frac{\partial (v_m)_i}{\partial x_j}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\,dx - \varkappa \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n (v_m)_k \frac{\partial (v_m)_j}{\partial x_i}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\,dx +$$
$$+2\varkappa \int\limits_\Omega \Big(\mathcal{E}(v_m)W_\rho(v_m) - W_\rho(v_m)\mathcal{E}(v_m)\Big) : \nabla\varphi\,dx = \int_\Omega f\varphi\,dx. \qquad (2.4.14)$$

и начальному условию:

$$v_m\Big|_{t=0}(x) = v_0^m(x), \quad x \in \Omega. \qquad (2.4.15)$$

Аналогично рассуждениям, проведенным в предельном переходе пункта 1.2.5, получим:

$$v_m \rightharpoonup v_* \quad \text{слабо в } L_2(0,T;V^1) \quad \text{при } m \to +\infty;$$
$$v_m \rightharpoonup v_* \quad {}^*\text{-слабо в } L_\infty(0,T;V^1) \quad \text{при } m \to +\infty;$$
$$v'_m \rightharpoonup v'_* \quad \text{слабо в } L_2(0,T;V^{-1}) \quad \text{при } m \to +\infty;$$
$$v_m \to v_*, \quad \text{сильно в } C([0,T],L_4(\Omega)) \quad \text{при } m \to +\infty.$$

Тогда при $m \to +\infty$ в силу определения слабой сходимости

$$\int\limits_\Omega \nu(\theta)\nabla v_m : \nabla\varphi\,dx \to \int\limits_\Omega \nu(\theta)\nabla v_* : \nabla\varphi\,dx \quad \text{для любого } \varphi \in V^3.$$

Поскольку линейный оператор переводит слабо сходящуюся последовательность в слабо сходящуюся, то при $m \to +\infty$ получим что

$$\int\limits_\Omega v'_m\varphi\,dx + \varkappa\int\limits_\Omega \nabla v'_m : \nabla\varphi\,dx = \langle (J+\varkappa A)v'_m,\varphi\rangle \to \langle (J+\varkappa A)v'_*,\varphi\rangle =$$
$$= \frac{d}{dt}\int\limits_\Omega v_*\varphi\,dx + \varkappa\frac{d}{dt}\int\limits_\Omega \nabla v_* : \nabla\varphi\,dx.$$

В силу единственности слабого предела

$$\varepsilon_m\int\limits_0^T\int\limits_\Omega \nabla\left(\Delta v'_m\right) : \nabla\left(\Delta\varphi\right)\,dx\,dt \to 0 \quad \text{при } m \to +\infty.$$

А также получим, что

$$\int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n (v_m)_i(v_m)_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx \to \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n (v_*)_i(v_*)_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx \quad \text{при } m \to +\infty.$$

В силу того, что v_m сходится к v_* сильно в $C([0,T],L_4(\Omega))$, а $\nabla(v_m)$ сходится к ∇v_* слабо в $L_4(0,T;L_2(\Omega))$, их произведение сходится слабо к произведению пределов. Следовательно в следующих интегралах имеем

$$\varkappa\int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n (v_m)_k\frac{\partial(v_m)_i}{\partial x_j}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i\partial x_k}\,dx \to \varkappa\int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n (v_*)_k\frac{\partial(v_*)_i}{\partial x_j}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i\partial x_k}\,dx;$$
$$\varkappa\int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n (v_m)_k\frac{\partial(v_m)_j}{\partial x_i}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i\partial x_k}\,dx \to \varkappa\int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n (v_*)_k\frac{\partial(v_*)_j}{\partial x_i}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i\partial x_k}\,dx.$$

Осталось доказать последний предельный переход.

$$\int\limits_0^T \int\limits_\Omega (\mathcal{E}(v_m)W_\rho(v_m) - \mathcal{E}(v_*)W_\rho(v_*)) : \nabla\varphi\psi\, dx\, dt =$$

$$= \int\limits_0^T \int\limits_\Omega (\mathcal{E}(v_m)(W_\rho(v_m) - W_\rho(v_*)) + (\mathcal{E}(v_m) - \mathcal{E}(v_*))W_\rho(v_*)) : \nabla\varphi\psi\, dx\, dt \leq$$

$$\leq \|\mathcal{E}(v_m)\|_{C([0,T],L_2(\Omega))} \|\nabla\varphi\|_{L_2(\Omega)} \|\psi\|_{C([0,T])} \int\limits_0^T \|W_\rho(v_m - v_*)\|_{L_\infty(\Omega)}\, dt +$$

$$+ \|W_\rho(v_*)\|_{C([0,T],L_\infty(\Omega))} \int\limits_0^T \mathcal{E}(v_m - v_*) : \nabla\varphi\psi\, dt \leq$$

$$\leq C_4 \Big(\|\mathcal{E}(v_m)\|_{C([0,T],L_2(\Omega))} \|\nabla\varphi\|_{L_2(\Omega)} \|\psi\|_{C([0,T])} \int\limits_0^T \|(v_m - v_*)\|_{L_2(\Omega)}\, dt +$$

$$+ \|W_\rho(v_*)\|_{C([0,T],L_\infty(\Omega))} \int\limits_0^T \mathcal{E}(v_m - v_*) : \nabla\varphi\psi\, dt \Big) \leq$$

$$\leq C_5 \Big(\|\mathcal{E}(v_m)\|_{C([0,T],L_2(\Omega))} \|\nabla\varphi\|_{L_2(\Omega)} \|\psi\|_{C([0,T])} \int\limits_0^T \|(v_m - v_*)\|_{L_4(\Omega)}\, dt +$$

$$+ \|W_\rho(v_*)\|_{C([0,T],L_\infty(\Omega))} \int\limits_0^T \mathcal{E}(v_m - v_*) : \nabla\varphi\psi\, dt \Big).$$

Вспомним, что последовательность v_m сходится к v_* сильно в $C([0,T], L_4(\Omega))$, а $\nabla(v_m)$ сходится к ∇v_* слабо в $L_4(0,T; L_2(\Omega))$. Следовательно мы доказали

$$\int\limits_\Omega \mathcal{E}(v_m)W_\rho(v_m) : \nabla\varphi\, dx \to \int\limits_\Omega \mathcal{E}(v_*)W_\rho(v_*) : \nabla\varphi\, dx \quad \text{при } m \to +\infty.$$

Для второй части используем тот же метод:

$$\int\limits_0^T \int\limits_\Omega (W_\rho(v_m)\mathcal{E}(v_m) - W_\rho(v_*)\mathcal{E}(v_*)) : \nabla\varphi\psi\, dx\, dt =$$

$$= \int_0^T \int_\Omega \Big(W_\rho(v_m)(\mathcal{E}(v_m) - \mathcal{E}(v_*)) + (W_\rho(v_m) - W_\rho(v_*))\mathcal{E}(v_*) \Big) : \nabla\varphi\psi \, dx \, dt \leq$$

$$\leq \|W_\rho(v_m)\|_{C([0,T],L_\infty(\Omega))} \int_0^T \int_\Omega |\mathcal{E}(v_m - v_*) : \nabla\varphi\psi| \, dx \, dt +$$

$$+ \|\mathcal{E}(v_*)\|_{C([0,T],L_2(\Omega))} \|\nabla\varphi\|_{L_2(\Omega)} \|\psi\|_{C([0,T])} \int_0^T \|W_\rho(v_m - v_*)\|_{L_\infty(\Omega)} \, dt \leq$$

$$\leq C_6 \Big(\|W_\rho(v_m)\|_{C([0,T],L_\infty(\Omega))} \int_0^T \int_\Omega |\mathcal{E}(v_m - v_*) : \nabla\varphi\psi| \, dx \, dt +$$

$$+ \|\mathcal{E}(v_*)\|_{C([0,T],L_2(\Omega))} \|\nabla\varphi\|_{L_2(\Omega)} \|\psi\|_{C([0,T])} \int_0^T \|v_m - v_*\|_{L_2(\Omega)} \, dt \Big) \leq$$

$$\leq C_7 \Big(\|W_\rho(v_m)\|_{C([0,T],L_\infty(\Omega))} \int_0^T \int_\Omega |\mathcal{E}(v_m - v_*) : \nabla\varphi\psi| \, dx \, dt +$$

$$+ \|\mathcal{E}(v_*)\|_{C([0,T],L_2(\Omega))} \|\nabla\varphi\|_{L_2(\Omega)} \|\psi\|_{C([0,T])} \int_0^T \|v_m - v_*\|_{L_4(\Omega)} \, dt \Big).$$

В итоге получаем, что

$$\int_\Omega W_\rho(v_m)\mathcal{E}(v_m) : \nabla\varphi \, dx \to \int_\Omega W_\rho(v_*)\mathcal{E}(v_*) : \nabla\varphi \, dx \quad \text{при } m \to +\infty.$$

Таким образом переходя в равенстве (2.4.14) к пределу при $m \to +\infty$ получим, что предельная функция v_* удовлетворяет для пробной функции $\varphi \in V^3$ следующему равенству:

$$\Big\langle (J + \varkappa A)\frac{\partial v_*}{\partial t}, \varphi \Big\rangle - \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n (v_*)_i (v_*)_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \, dx + \int_\Omega \nu(\theta)\nabla v_* : \nabla\varphi \, dx -$$

$$-\varkappa \int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n (v_*)_k \frac{\partial (v_*)_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} \, dx - \varkappa \int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n (v_*)_k \frac{\partial (v_*)_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} \, dx +$$

$$+2\varkappa \int_\Omega \Big(\mathcal{E}(v_*)W_\rho(v_*) - W_\rho(v_*)\mathcal{E}(v_*) \Big) : \nabla\varphi \, dx = \int_\Omega f\varphi \, dx.$$

В силу сильной сходимости получаем, что v_m сходится к v_* поточечно на $[0, T]$. Отсюда, переходя в (2.4.15) к пределу при $m \to +\infty$ в силу выбора v_0^m

имеем, что v_* удовлетворяет следующему начальному условию: $v_*|_{t=0} = v_0^*$. Так как для последовательности $\{v_m\}$ имеет место априорная оценка (2.4.13), то для v_* непосредственно получаем оценку:

$$\|v_*\|_{L_\infty(0,T;V^1)} + \|v_*'\|_{L_2(0,T;V^{-1})} \leqslant R_1, \quad R_1 = R_1(T, \|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}, \|v_0^*\|_{V^1}).$$

Отсюда получаем, что $v_* \in E_1$, что и завершает доказательство теоремы 2.4.2.

2.4.3 Построение последовательных приближений

Рассмотрим последовательность $(v^n, \theta^n), n = 0, 1, 2, \dots,$ определяемую следующим образом. Пусть v^0 и θ^0 означают начальные значения v_0 и θ_0 для v и θ из (2.4.3) и (2.4.5). Пусть (v^n, θ^n) известны. Тогда вначале находится v^{n+1} как слабое решение задачи

$$\frac{\partial v^{n+1}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i^{n+1} \frac{\partial v^{n+1}}{\partial x_i} - 2\mathrm{Div}(\nu(\theta^n)\mathcal{E}(v^{n+1})) - \varkappa \frac{\partial \Delta v^{n+1}}{\partial t} -$$

$$-2\varkappa \mathrm{Div}\big(v_i^{n+1} \frac{\partial \mathcal{E}(v^{n+1})}{\partial x_i}\big) - 2\varkappa \mathrm{Div}\Big(\mathcal{E}(v^{n+1}) W_\rho(v^{n+1}) - W_\rho(v^{n+1})\mathcal{E}(v^{n+1})\Big) +$$

$$+\nabla p = f; \tag{2.4.16}$$

$$\mathrm{div}\, v^{n+1} = 0, \quad (t, x) \in Q_T; \tag{2.4.17}$$

$$v|_{t=0} = v_0, \quad x \in \Omega; \qquad v^{n+1}|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0, \tag{2.4.18}$$

затем, при найденном v^{n+1} находится θ^{n+1} как слабое решение задачи

$$\frac{\partial \theta^{n+1}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i^{n+1} \frac{\partial \theta^{n+1}}{\partial x_i} - \chi \triangle \theta^{n+1} = 2\nu(\theta^n)\mathcal{E}(v^{n+1}) : \mathcal{E}(v^{n+1}) +$$

$$+2\varkappa \frac{\partial \mathcal{E}(v^{n+1})}{\partial t} : \mathcal{E}(v^{n+1}) + g, \quad (t, x) \in Q_T; \tag{2.4.19}$$

$$\theta^{n+1}|_{t=0} = \theta_0, \quad x \in \Omega; \quad \theta^{n+1}|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0. \tag{2.4.20}$$

Разрешимость задачи (2.4.16)–(2.4.18) следует из теоремы 2.4.2. При найденной функции v^{n+1} выполнены все требования теоремы 2.1.6. Отсюда следует, что задача (2.4.19)–(2.4.20) также разрешима.

2.4.4 Предельный переход

Рассмотрим теперь последовательность (v^n, θ^n), $n = 1, 2, \dots$, где v^n — решение задачи (2.4.16)–(2.4.18), а θ^n — решение задачи (2.4.19)–(2.4.20).

Аналогично предельным переходам при доказательстве теорем 2.1.2 и 2.4.2 получим следующие сходимости. Последовательность θ^n сходится к θ п.в. в $L_p(Q_T)$, где p удовлетворяет условиям теоремы 2.4.1. В силу оценки (2.4.8) получаем, что v^n слабо сходится к v в $L_2(0,T;V^1)$, а $\dfrac{\partial v^n}{\partial t}$ слабо сходится в $L_2(0,T;V^{-1})$. Из теоремы 1.1.5 вытекает вполне непрерывное вложение $F = \{v : v \in C([0,T],V);\ v' \in L_2(0,T;V)\} \subset C([0,T],L_4(\Omega))$. Отсюда, учитывая априорные оценки, получаем (при необходимости переходя к подпоследовательностям), что $v_n \to v$ сильно в $C([0,T],L_4(\Omega))$. Таким образом, v_n сходится к v сильно в $C([0,T],L_4(\Omega))$, а $\nabla(v_n)$ сходится к ∇v слабо в $L_2(0,T;L_2(\Omega))$. Аналогично теореме 2.1.7 получаем, что последовательность v^n сильно сходится в $L_2(0,T;V^1)$ к v.

В силу получившихся сходимостей в равенствах

$$\int\limits_\Omega (v^n)'(t)\,\varphi\,dx - \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i^n(t)v_j^n(t)\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx + 2\int\limits_\Omega \nu(\theta^{n-1})\mathcal{E}(v^n(t)) : \nabla\varphi\,dx +$$

$$+\varkappa\int\limits_\Omega \nabla(v^n)'(t) : \nabla\varphi\,dx + 2\varkappa\int\limits_\Omega \Big(\mathcal{E}(v^n)W_\rho(v^n) - W_\rho(v^n)\mathcal{E}(v^n)\Big) : \nabla\varphi\,dx -$$

$$-\varkappa\int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k^n\frac{\partial v_i^n}{\partial x_j}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i\partial x_k}\,dx - \varkappa\int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k^n\frac{\partial v_j^n}{\partial x_i}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i\partial x_k}\,dx = \int\limits_\Omega f(t)\varphi\,dx$$

$$\frac{d(\theta^n,\phi)}{dt} - \Big(\sum_{i=1}^n v_i^n\theta^n, \frac{\partial\phi}{\partial x_i}\Big) + \chi\Big(\frac{\partial\theta^n}{\partial x_i}, \frac{\partial\phi}{\partial x_i}\Big) = \langle g,\phi\rangle +$$

$$+2(\nu(\theta^{n-1})\mathcal{E}(v^n) : \mathcal{E}(v^n),\phi) + 2\varkappa\Big(\frac{\partial\mathcal{E}(v^n)}{\partial t} : \mathcal{E}(v^n), \mathcal{E}(\phi)\Big)$$

можно перейти к приделу. Таким образом, получим пару функций $v \in E_1$ и $\theta \in E_2$, удовлетворяющих равенствам (2.4.6) и (2.4.7). Это и завершает доказательство Теоремы 2.4.1.

2.5 Существование слабых решений термо–модели Лере

В данном параграфе рассматривается математическая альфа–модель Лере с вязкостью, зависящей от температуры. В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, на отрезке времени $[0, T]$, $T > 0$, рассматривается следующая начально–краевая задача:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - 2\mathrm{Div}\ (\nu(\theta)\mathcal{E}(v)) + (u \cdot \nabla)v + \nabla p = f; \tag{2.5.1}$$

$$\mathrm{div}\ v = 0; \tag{2.5.2}$$

$$v = u - \alpha^2 \Delta u; \tag{2.5.3}$$

$$v|_{t=0} = v_0; \quad v|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0; \tag{2.5.4}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + (v \cdot \nabla)\theta - \chi\Delta\,\theta = 2\nu(\theta)\mathcal{E}(v) : \mathcal{E}(v) + g; \tag{2.5.5}$$

$$\theta|_{t=0} = \theta_0; \quad \theta|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0. \tag{2.5.6}$$

Здесь, $\alpha > 0$ — скалярный параметр.

2.5.1 Постановка задачи

В данном пункте основными являются следующие функциональные пространства:

$E_1 = \{v : v \in L_2(0, T; V^1), v' \in L_2(0, T; V^{-1})\}$,

с нормой $\|v\|_{E_1} = \|v\|_{L_2(0,T,V^1)} + \|v'\|_{L_2(0,T;V^{-1})}$ и

$E_2 = \{v : v \in L_p(0, T; W_p^1(\Omega)), v' \in L_1(0, T;\, W_p^{-1}(\Omega)),\ 1 < p < +\infty\}$,

с нормой $\|v\|_{E_2} = \|v\|_{L_p(0,T,W_p^1(\Omega))} + \|v'\|_{L_1(0,T;W_p^{-1}(\Omega))}$.

Обозначим через $\Delta_\alpha : V^\beta \to V^{\beta-2}$, $\beta \geq 0$, оператор $\Delta_\alpha = (J + \alpha^2 A)$, где $J = PI$, I — тождественный оператор. В силу [32, лемма 4.4.4] оператор Δ_α обратим. Применив проектор Лере $P : L_2(\Omega) \to V^0$ к обеим частям равенства $v = (I - \alpha^2\Delta)u$ для $\beta = 3$ и выразим из последнего равенства u: $u = (J + \alpha^2 A)^{-1} v = \Delta_\alpha^{-1} v$. Т.к. $v(t) \in V^1$ получим, что $u(t) \in V^3$ при п.в. $t \in [0, T]$.

Определение 2.5.1. *Слабым решением начально–краевой задачи* (2.5.1)–(2.5.6) *называется пара* (v, θ), *где* $v \in E_1$ *и* $\theta \in E_2$, *удовлетворяющая при* *всех* $\varphi \in V$, $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ *и почти всех* $t \in [0,T]$ *соотношениям*

$$\int\limits_\Omega \frac{\partial v}{\partial t}\,\varphi\,dx - \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n (\Delta_\alpha^{-1} v)_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\,dx + \\ + 2\int\limits_\Omega \nu(\theta)\mathcal{E}(v) : \mathcal{E}(\varphi)\,dx = \langle f(t), \varphi\rangle, \quad (2.5.7)$$

$$\int\limits_\Omega \frac{\partial \theta}{\partial t}\phi dx - \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i\theta_j \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i} dx + \chi \int\limits_\Omega \mathcal{E}(\theta) : \mathcal{E}(\phi) dx = \\ = 2\int\limits_\Omega \big(\nu(\theta)\mathcal{E}(v) : \mathcal{E}(v)\big) : \phi dx + \langle g, \phi\rangle, \quad (2.5.8)$$

и начальным условиям $v|_{t=0} = v_0$ *и* $\theta|_{t=0} = \theta_0$.

Основным результатом данного параграфа является следующая теорема:

Теорема 2.5.1. *Пусть функция* $\nu(\theta) \in C^2(-\infty, +\infty)$ *и* $0 < \nu(\theta) \le M$, $f \in L_p(0,T;V^{-1})$, $g \in L_1(0,T;H_p^{-2(1-1/p)}(\Omega))$, $v_0 \in V^1$, $\theta_0 \in W_p^{1-2/p}(\Omega))$. *Тогда при* $1 < p < 4/3$ *для* $n = 2$ *и для* $1 < p < 10/9$ *при* $n = 3$ *существует слабое решение начально–краевой задачи* (2.5.1)–(2.5.6).

Доказательство теоремы 2.5.1 проводится поэтапно. На первом этапе устанавливается разрешимость задачи (2.5.1)–(2.5.6) с известной $\theta \in E_2$. Затем устанавливается разрешимость задачи (2.5.1)–(2.5.6) с заданной $v \in E_1$. Далее, описывается итерационный процесс, состоящий в последовательном решении вышеприведенных задач, и, наконец, доказывается сходимость последовательных приближений к решению задачи (2.5.1)–(2.5.6).

2.5.2 Доказательство разрешимости начально–краевой задачи (2.5.1)–(2.5.4)

Рассмотрим начально–краевую задачу (2.5.1)–(2.5.4) при фиксированной $\theta \in E_2$. Получим следующую начально–краевую задачу:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - 2\mathrm{Div}\,(\nu(\theta)\mathcal{E}(v)) + (u\cdot\nabla)v + \nabla p = f; \quad (2.5.9)$$

$$\mathrm{div}\, v = 0; \quad v = u - \alpha^2\Delta u; \quad (2.5.10)$$

$$v|_{t=0} = v_0; \quad v|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0. \quad (2.5.11)$$

Слабое решение задачи (2.5.9)–(2.5.11) определим как функцию $v \in E_1$, удовлетворяющую (2.5.7) и начальному условию $v|_{t=0} = v_0$.

Для данной начально–краевой задачи справедлива следующая теорема.

Теорема 2.5.2. *Пусть функция $\nu(\theta) \in C^2(-\infty, +\infty)$ и $0 < \nu(\theta) \leq M$, $f \in L_2(0,T;V^{-1})$, $v_0 \in V^1$, $\theta \in E_2$. Тогда задача* (2.5.9)–(2.5.11) *имеет по крайней мере одно слабое решение $v \in E_1$, для которого справедлива оценка*

$$\|v\|_{E_1} \leqslant R_1, \quad R_1 = R_1(T, \|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}, \|v_0\|_{V^1}). \tag{2.5.12}$$

Доказательство данной теоремы состоит из нескольких частей. Сначала на основе аппроксимационно–топологического подхода к исследованию математических задач гидродинамики доказывается существование слабых решений вспомогательных задач, зависящих от малого параметра $\varepsilon > 0$. Далее, на основе необходимых оценок устанавливается предельный переход. Рассмотрим следующее вспомогательное семейство систем уравнений ($0 \leqslant \xi \leqslant 1$) с малым параметром $\varepsilon > 0$:

$$\varepsilon \frac{\partial \Delta^2 v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial t} + \xi \sum_{i=1}^{n} (\Delta_\alpha^{-1} v)_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - 2\mathrm{Div}\ (\nu(\theta)\mathcal{E}(v)) + \nabla p = \xi f, \tag{2.5.13}$$

$$\mathrm{div}\, v = 0, \quad t \in [0,T], \quad x \in \Omega, \tag{2.5.14}$$

$$v|_{\partial\Omega} = 0, \quad \Delta v|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \in [0,T] \quad v|_{t=0} = v_0, \quad x \in \Omega. \tag{2.5.15}$$

Для данного семейства рассмотрим еще одно функциональное пространство:

$$\overline{E_1} = \{v \in C([0,T];V^3), \quad v' \in L_2(0,T;V^3)\}$$

с нормой $\|v\|_{\overline{E_1}} = \|v\|_{C(0,T;V^3)} + \|v'\|_{L_2(0,T;V^3)}$.

По аналогии с определением слабого решения для начально–краевой задачи (2.5.9)–(2.5.11), мы сформулируем определение слабого решения *вспомогательной задачи* (2.5.13)–(2.5.15) при фиксированном $0 \leqslant \xi \leqslant 1$.

Определение 2.5.2. *Функция $v \in \overline{E_1}$, которая для любого $\varphi \in V^1$ и почти всех $t \in (0,T)$ удовлетворяет равенству*

$$\langle v', \varphi \rangle - \xi \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} (\Delta_\alpha^{-1} v)_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx + 2 \int_\Omega \nu(\theta)\mathcal{E}(v) : \mathcal{E}(\varphi)\, dx -$$

$$-\varepsilon \int_\Omega \nabla \Delta v' : \nabla \varphi\, dx = \xi \langle f, \varphi \rangle \tag{2.5.16}$$

и начальному условию (2.5.15), называется слабым решением вспомогательной задачи (2.5.13)–(2.5.15).

Для доказательства существования слабого решения вспомогательной задачи (2.5.13)–(2.5.15) при $\xi = 1$, перепишем вспомогательное семейство в операторной форме. Используя слагаемые в равенстве (2.5.16), мы введем операторы с помощью следующих равенств:

$$J : V^3 \to V^{-1}, \quad \langle Jv, \varphi\rangle = \int\limits_{\Omega} v\varphi\, dx, \quad v \in V^3, \quad \varphi \in V^1;$$

$$A_2 : V^3 \to V^{-1}, \quad \langle A_2 v, \varphi\rangle = -\int\limits_{\Omega} \nabla\Delta v : \nabla\varphi\, dx, \quad v \in V^3, \quad \varphi \in V^1;$$

$$B : L_4(\Omega) \to V^{-1}, \quad \langle B(v), \varphi\rangle = \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} (\Delta_\alpha^{-1} v)_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx, \quad v \in L_4(\Omega),\, \varphi \in V^1;$$

$$D : V^3 \to V^{-1}, \quad \langle Dv, \varphi\rangle = \int\limits_{\Omega} \nu(\theta)\mathcal{E}(v) : \nabla\varphi\, dx, \quad v \in V^3,\, \varphi \in V^1.$$

Поскольку в (2.5.16) функция $\varphi \in V^1$ произвольна, то при почти всех $t \in (0,T)$ это равенство эквивалентно следующему операторному уравнению, рассматриваемого в $L_2(0,T;V^{-1})$:

$$Jv' + \varepsilon A_2 v' + 2\nu Dv - \xi B(v) = \xi f. \tag{2.5.17}$$

Таким образом, слабое решение вспомогательной задачи (2.5.13)–(2.5.15) при фиксированном $0 \leqslant \xi \leqslant 1$ — это решение $v \in \overline{E_1}$ операторного уравнения (2.5.17), удовлетворяющее начальному условию (2.5.15).

Также определим операторы при помощи следующих равенств:

$$L : \overline{E_1} \to L_2(0,T;V^{-1}) \times V^3, \quad L(v) = ((J + \varepsilon A_2)v' + 2\nu Dv, v|_{t=0});$$

$$K : \overline{E_1} \to L_2(0,T;V^{-1}) \times V^3, \quad K(v) = (B(v), 0).$$

Тогда задача о нахождении решения операторного уравнения (2.5.17) при фиксированном $0 \leqslant \xi \leqslant 1$, удовлетворяющему начальному условию (2.5.15), эквивалентна задаче о нахождении решения при фиксированном $0 \leqslant \xi \leqslant 1$ операторного уравнения

$$L(v) = \xi(K(v) + (f, v_0)). \tag{2.5.18}$$

Нам потребуются следующие свойства операторов, входящих в уравнения (2.5.17) и (2.5.18). Чтобы не нагромождать обозначений, мы будем использовать одну и ту же букву для обозначения одних и тех же операторов, действующих в разных функциональных пространствах.

Лемма 2.5.1. *1) Для любой $v \in C([0,T];V^3)$ функция $Dv \in L_2(0,T;V^{-1})$ и оператор $D : C([0,T];V^3) \to L_2(0,T;V^{-1})$ — непрерывен, причём имеет место оценка:*

$$\|Dv\|_{L_2(0,T;V^{-1})} \leqslant C_1\|v\|_{C([0,T];V^3)}. \tag{2.5.19}$$

2) Оператор $A_2 : V^3 \to V^{-1}$ — линейный, непрерывный, обратимый и для него имеет место оценка:

$$\|A_2 v\|_{V^{-1}} \leqslant \|v\|_{V^3}. \tag{2.5.20}$$

Кроме того, обратный оператор $A_2^{-1} : V^{-1} \to V^3$ также непрерывен.
3) Для любой функции $v \in L_p(0,T;V^3)$, $1 \leqslant p < \infty$, функция $(J+\varepsilon A_2)v$ принадлежит $L_p(0,T;V^{-1})$ и оператор $(J+\varepsilon A_2) : L_p(0,T;V^3) \to L_p(0,T;V^{-1})$ непрерывен и обратим. Кроме того, имеет место оценка

$$\varepsilon\|v\|_{L_p(0,T;V^3)} \leqslant \|(J+\varepsilon A_2)v\|_{L_p(0,T;V^{-1})} \leqslant C_2(1+\varepsilon)\|v\|_{L_p(0,T;V^3)}. \tag{2.5.21}$$

Причем обратный к нему оператор $(J+\varepsilon A_2)^{-1} : L_p(0,T;V^{-1}) \to L_p(0,T;V^3)$ — непрерывен и для любого $w \in L_p(0,T;V^{-1})$ имеет место оценка

$$\|(J+\varepsilon A_2)^{-1}w\|_{L_p(0,T;V^3)} \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\|w\|_{L_p(0,T;V^{-1})}. \tag{2.5.22}$$

4) Оператор $L : \overline{E_1} \to L_2(0,T;V^{-1}) \times V^3$ обратим и обратный к нему оператор $L^{-1} : L_2(0,T;V^{-1}) \times V^3 \to \overline{E_1}$ является непрерывным оператором.

Доказательство проводится аналогичным образом как в [32, Лемма 4.4.1, Лемма 4.4.2, Лемма 4.4.3, Лемма 7.7.6].

Лемма 2.5.2. *1) Отображение $B : L_4(\Omega) \to V^{-1}$ непрерывно и для него имеет место оценка:*

$$\|B(v)\|_{V^{-1}} \leqslant C_3\|v\|^2_{L_4(\Omega)}. \tag{2.5.23}$$

2) Для любого $v \in L_4(0,T;L_4(\Omega))$ функция $B(v) \in L_2(0,T;V^{-1})$ и отображение $B : L_4(0,T;L_4(\Omega)) \to L_2(0,T;V^{-1})$ — непрерывно.

3) Для любой функции $v \in \overline{E_1}$ функция $B(v) \in L_2(0,T;V^{-1})$ и отображение $B : \overline{E_1} \to L_2(0,T;V^{-1})$ является компактным.

Доказательство. 1) Для любых $v \in L_4(\Omega)$, $\varphi \in V^1$, используя неравенство Гельдера, мы получим

$$|\langle B(v),\varphi\rangle| = \Big|\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_{\Omega}(\Delta_\alpha^{-1}v)_i v_j \frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx\Big| \leqslant \sum_{i,j=1}^{n}\Big(\int\limits_{\Omega}|(\Delta_\alpha^{-1}v)_i v_j|^2\,dx\Big)^{\frac{1}{2}}\times$$
$$\times\Big(\int\limits_{\Omega}\Big|\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\Big|^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant \sum_{i,j=1}^{n}\Big(\int\limits_{\Omega}|(\Delta_\alpha^{-1}v)_i|^4\,dx\Big)^{\frac{1}{4}}\Big(\int\limits_{\Omega}|v_j|^4\,dx\Big)^{\frac{1}{4}}\|\varphi\|_{V^1} \leqslant$$
$$\leqslant C_4\|\Delta_\alpha^{-1}v\|_{L_4(\Omega)}\|v\|_{L_4(\Omega)}\|\varphi\|_{V^1} \leqslant C_4C_5\|v\|^2_{L_4(\Omega)}\|\varphi\|_{V^1} = C_6\|v\|^2_{L_4(\Omega)}\|\varphi\|_{V^1}.$$

Откуда следует неравенство (2.5.23). Отметим, что здесь мы воспользовались следующей известной оценкой (см. [1], [65]):

$$\|\Delta_\alpha^{-1}v\|_{L_p(\Omega)} = \|(I-\alpha^2\Delta)^{-1}v\|_{L_p(\Omega)} \leqslant C_5\|v\|_{L_p(\Omega)}, \quad p>1. \tag{2.5.24}$$

Покажем непрерывность отображения $B : L_4(\Omega) \to V^{-1}$. Для произвольных v^m, $v^0 \in L_4(\Omega)$ имеем

$$|\langle B(v^m),\varphi\rangle - \langle B(v^0),\varphi\rangle| =$$
$$= \Big|\int\limits_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{n}(\Delta_\alpha^{-1}v^m)_i v_j^m\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx - \int\limits_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{n}(\Delta_\alpha^{-1}v^0)_i v_j^0\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx\Big| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i,j=1}^{n}\|(\Delta_\alpha^{-1}v^m)_i v_j^m - (\Delta_\alpha^{-1}v^0)_i v_j^0\|_{L_2(\Omega)}\Big\|\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\Big\|_{L_2(\Omega)} \leqslant$$
$$\leqslant \|\varphi\|_{V^1}\sum_{i,j=1}^{n}\|(\Delta_\alpha^{-1}v^m)_i v_j^m - (\Delta_\alpha^{-1}v^0)_i v_j^0\|_{L_2(\Omega)} =$$
$$= \|\varphi\|_{V^1}\Big(\sum_{i,j=1}^{n}\|(\Delta_\alpha^{-1}v^m)_i v_j^m - (\Delta_\alpha^{-1}v^m)_i v_j^0 + (\Delta_\alpha^{-1}v^m)_i v_j^0 - (\Delta_\alpha^{-1}v^0)_i v_j^0\|_{L_2(\Omega)}\Big) \leqslant$$
$$\leqslant \|\varphi\|_{V^1}\Big(\sum_{i,j=1}^{n}\|(\Delta_\alpha^{-1}v^m)_i v_j^m - (\Delta_\alpha^{-1}v^m)_i v_j^0\|_{L_2(\Omega)} +$$
$$+\sum_{i,j=1}^{n}\|(\Delta_\alpha^{-1}v^m)_i v_j^0 - (\Delta_\alpha^{-1}v^0)_i v_j^0\|_{L_2(\Omega)}\Big) \leqslant$$

$$\leqslant C_7\|\varphi\|_{V^1}\Big(\sum_{j=1}^{n}\|\Delta_\alpha^{-1}v^m\|_{L_4(\Omega)}\|v_j^m-v_j^0\|_{L_4(\Omega)}+$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\|\Delta_\alpha^{-1}(v^m-v^0)\|_{L_4(\Omega)}\|v_j^0\|_{L_4(\Omega)}\Big)\leqslant$$

$$\leqslant C_7C_5\|\varphi\|_{V^1}\Big(\sum_{j=1}^{n}\|v^m\|_{L_4(\Omega)}\|v_j^m-v_j^0\|_{L_4(\Omega)}+\sum_{j=1}^{n}\|v^m-v^0\|_{L_4(\Omega)}\|v_j^0\|_{L_4(\Omega)}\Big)\leqslant$$

$$\leqslant C_8(\|v^m\|_{L_4(\Omega)}\|v^m-v^0\|_{L_4(\Omega)}+\|v^m-v^0\|_{L_4(\Omega)}\|v^0\|_{L_4(\Omega)})\|\varphi\|_{V^1}=$$

$$=C_9(\|v^m\|_{L_4(\Omega)}+\|v^0\|_{L_4(\Omega)})\|v^m-v^0\|_{L_4(\Omega)}\|\varphi\|_{V^1}.$$

Таким образом,

$$\|B(v^m)-B(v^0)\|_{V^{-1}}\leqslant C_9(\|v^m\|_{L_4(\Omega)}+\|v^0\|_{L_4(\Omega)})\|v^m-v^0\|_{L_4(\Omega)}.$$

Полагая $v^m\to v^0$ в $L_4(\Omega)$, получаем, что отображение $B:L_4(\Omega)\to V^{-1}$ является непрерывным.

2) Для доказательства необходимо воспользоваться последней оценкой и повторить доказательство леммы 2.5.4 (пункт 2) из [32].

3) Для доказательства этого пункта воспользуемся теоремой Симона 1.1.5. Рассмотрим множество $F=\{v\in L_4(0,T;V^3), v'\in L_2(0,T;L_2(\Omega))\}$. Так как вложение $V^3\subset L_4(\Omega)$ является компактным, то компактным является вложение $F\subset L_4(0,T;L_4(\Omega))$.

Из непрерывных вложений

$$C([0,T];V^3)\subset L_4(0,T;V^3),\quad L_2(0,T;V^3)\subset L_2(0,T;L_2(\Omega))$$

следует непрерывное вложение $E_2\subset F$. Кроме того, из второго пункта настоящей леммы мы имеем, что оператор $B:L_4(0,T;L_4(\Omega))\to L_2(0,T;V^{-1})$ является непрерывным. Таким образом, имеем следующую суперпозицию вложений:

$$\overline{E_1}\subset F\subset L_4(0,T;L_4(\Omega))\xrightarrow{B}L_2(0,T;V^{-1}),$$

где первое вложение непрерывно, второе — компактно и отображение B — непрерывно. Следовательно, для любой функции $v\in\overline{E_1}$ получим, что функция $B(v)\in L_2(0,T;V^{-1})$, а отображение $B:\overline{E_1}\to L_2(0,T;V^{-1})$ — компактно. Лемма доказана. $\square$

Установим априорные оценки решений операторного уравнения (2.5.17).

Лемма 2.5.3. *Пусть* $v_0 \in V^3$, $f \in L_2(0,T;V^{-1})$. *Тогда для любого решения* $v \in \overline{E_1}$ *операторного уравнения (2.5.17) имеют место оценки:*

$$\|v\|_{L_2(0,T;V^1)} \leqslant C_{10}(\|v_0\|_{V^0} + \sqrt{\varepsilon}\|v_0\|_{V^2} + \|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}); \tag{2.5.25}$$

$$\|v\|_{C([0,T];V^0)} \leqslant C_{11}(\|v_0\|_{V^0} + \sqrt{\varepsilon}\|v_0\|_{V^2} + \|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}); \tag{2.5.26}$$

$$\varepsilon\|v\|^2_{C([0,T];V^2)} \leqslant C_{12}(\|v_0\|^2_{V^0} + \varepsilon\|v_0\|^2_{V^2} + \|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})}), \tag{2.5.27}$$

где постоянные C_{10}, C_{11}, C_{12} *не зависят от* ε *и* ξ.

Доказательство. Пусть $v \in \overline{E_1}$ — решение операторного уравнения (2.5.17). Тогда при любом $\varphi \in V^1$ и почти всех $t \in (0,T)$ имеет место равенство (2.5.16). Поскольку оно справедливо при всех $\varphi \in V^1$, то положим $\varphi = v$. Тогда, получим

$$\int\limits_\Omega v'(t)v(t)\,dx - \xi\int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n (\Delta_\alpha^{-1}v)_i(t)v_j(t)\frac{\partial v_j(t)}{\partial x_i}\,dx + 2\int\limits_\Omega \nu(\theta)\mathcal{E}(v):\mathcal{E}(v)\,dx-$$
$$-\varepsilon\int\limits_\Omega \nabla\Delta v'(t):\nabla v(t)\,dx = \xi\langle f(t), v(t)\rangle. \tag{2.5.28}$$

Отдельно преобразуем слагаемые в левой части последнего равенства следующим образом. Рассмотрим первое слагаемое:

$$\int\limits_\Omega v'(t)v(t)\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_\Omega \frac{\partial(v(t)v(t))}{\partial t}\,dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{V^0}.$$

Теперь перейдем к рассмотрению следующего слагаемого:

$$\int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n (\Delta_\alpha^{-1}v)_i(t)v_j(t)\frac{\partial v_j(t)}{\partial x_i}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n (\Delta_\alpha^{-1}v)_i(t)\frac{\partial(v_j(t)v_j(t))}{\partial x_i}\,dx =$$
$$= -\frac{1}{2}\int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial(\Delta_\alpha^{-1}v)_i(t)}{\partial x_i}v_j^2(t)\,dx = -\frac{1}{2}\int\limits_\Omega \sum_{j=1}^n \operatorname{div} u(t)v_j^2(t)\,dx = 0.$$

В третьем слагаемом имеем:

$$2\int\limits_\Omega \nu(\theta)\mathcal{E}(v):\mathcal{E}(v)\,dx \le C_{13}\|v(t)\|^2_{V^1}.$$

Наконец, преобразуем последнее слагаемое:

$$-\varepsilon \int\limits_{\Omega} \nabla \Delta v'(t) : \nabla v(t)\, dx = \frac{\varepsilon}{2} \int\limits_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t}\Big(\Delta v(t) \Delta v(t)\Big)\, dx = \frac{\varepsilon}{2} \frac{d}{dt} \|v(t)\|^2_{V^2}.$$

Таким образом, равенство (2.5.28) можно переписать в виде:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{V^0} + C_{13}\|v(t)\|^2_{V^1} + \frac{\varepsilon}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{V^2} = \xi\langle f(t), v(t)\rangle. \qquad (2.5.29)$$

Оценим по модулю правую часть полученного равенства. Воспользовавшись неравенством Коши

$$bc \leqslant \frac{\delta b^2}{2} + \frac{c^2}{2\delta}$$

для $\delta = 1/\mu_0$, мы получим:

$$\xi\langle f(t), v(t)\rangle \leqslant \|f(t)\|_{V^{-1}}\|v(t)\|_{V^1} \leqslant \frac{1}{2C_{13}}\|f(t)\|^2_{V^{-1}} + \frac{C_{13}}{2}\|v(t)\|^2_{V^1}.$$

Перепишем (2.5.29):

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{V^0} + \frac{\varepsilon}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{V^2} + \frac{C_{13}}{2}\|v(t)\|^2_{V^1} \leqslant \frac{1}{2C_{13}}\|f(t)\|^2_{V^{-1}}.$$

Проинтегрируем от 0 до τ, где $\tau \in [0, T]$, последнее неравенство по t. Тогда

$$\frac{1}{2}\|v(t)\|^2_{V^0} + \frac{\varepsilon}{2}\|v(t)\|^2_{V^2} + \frac{C_{13}}{2}\int\limits_0^\tau \|v(t)\|^2_{V^1}\, dt \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\|v_0\|^2_{V^0} + \frac{\varepsilon}{2}\|v_0\|^2_{V^2} + \frac{1}{2C_{13}}\int\limits_0^\tau \|f(t)\|^2_{V^{-1}}\, dt.$$

Из неотрицательности величин $\|v(t)\|^2_{V^0}$, $\|v(t)\|^2_{V^2}$ и $\|v(t)\|^2_{V^1}$ следуют оценки:

$$\frac{C_{13}}{2}\int\limits_0^\tau \|v(t)\|^2_{V^1}\, dt \leqslant \frac{1}{2}\|v_0\|^2_{V^0} + \frac{\varepsilon}{2}\|v_0\|^2_{V^2} + \frac{1}{2C_{13}}\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})},$$
$$\frac{\varepsilon}{2}\|v(t)\|^2_{V^2} \leqslant \frac{1}{2}\|v_0\|^2_{V^0} + \frac{\varepsilon}{2}\|v_0\|^2_{V^2} + \frac{1}{2C_{13}}\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})},$$
$$\frac{1}{2}\|v(t)\|^2_{V^0} \leqslant \frac{1}{2}\|v_0\|^2_{V^0} + \frac{\varepsilon}{2}\|v_0\|^2_{V^2} + \frac{1}{2C_{13}}\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})}.$$

Так как правая часть во всех приведенных неравенствах не зависит от τ, то перейдем в левых частях этих неравенств к максимуму по $\tau \in [0,T]$. Тогда

$$\frac{C_{13}}{2}\|v\|^2_{L_2(0,T;V^1)} \leqslant \frac{1}{2}\|v_0\|^2_{V^0} + \frac{\varepsilon}{2}\|v_0\|^2_{V^2} + \frac{1}{2C_{13}}\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})},$$

$$\frac{\varepsilon}{2}\|v\|^2_{C([0,T];V^2)} \leqslant \frac{1}{2}\|v_0\|^2_{V^0} + \frac{\varepsilon}{2}\|v_0\|^2_{V^2} + \frac{1}{2C_{13}}\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})},$$

$$\frac{1}{2}\|v\|^2_{C([0,T];V^0)} \leqslant \frac{1}{2}\|v_0\|^2_{V^0} + \frac{\varepsilon}{2}\|v_0\|^2_{V^2} + \frac{1}{2C_{13}}\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})}.$$

Отсюда непосредственно следуют требуемые оценки (2.5.25)–(2.5.27). Лемма доказана. □

Лемма 2.5.4. *Пусть $v_0 \in V^3$, $f \in L_2(0,T;V^{-1})$. Тогда для любого $v \in \overline{E_1}$ операторного уравнения (2.5.17) имеют место оценки*

$$\varepsilon\|v'\|_{L_2(0,T;V^3)} \leqslant C_{14}\Big(1+\frac{1}{\varepsilon}\Big)\Big(\|v_0\|^2_{V^0} + \|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})}\Big) + \\ + C_{14}\sqrt{\varepsilon}\|v_0\|_{V^2} + C_{14}\|v_0\|^2_{V^2}; \qquad (2.5.30)$$

$$\|v\|_{C([0,T];V^3)} \leqslant \|v_0\|_{V^3} + \frac{C_{14}T^{\frac{1}{2}}}{\varepsilon}\Big(1+\frac{1}{\varepsilon}\Big)\Big(\|v_0\|^2_{V^0} + \|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})}\Big) + \\ + \frac{C_{14}T^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\varepsilon}}\|v_0\|_{V^2} + \frac{C_{14}T^{\frac{1}{2}}}{\varepsilon}\|v_0\|^2_{V^2}; \qquad (2.5.31)$$

$$\|v'\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} \leqslant C_{15}(\|v_0\|^2_{V^0} + \varepsilon\|v_0\|^2_{V^2} + \|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} + 1); \qquad (2.5.32)$$

$$\varepsilon\|v'\|_{L_{4/3}(0,T;V^3)} \leqslant C_{16}(\|v_0\|^2_{V^0} + \varepsilon\|v_0\|^2_{V^2} + \|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} + 1); \qquad (2.5.33)$$

где постоянные C_{14}, C_{15}, C_{16} не зависят от ε, v и ξ.

Доказательство. Пусть $v \in \overline{E_1}$ — решение (2.5.17). Тогда оно удовлетворяет следующему операторному уравнению

$$Jv' + \varepsilon A_2 v' + 2\nu Dv - \xi B(v) = \xi f. \qquad (2.5.34)$$

Следовательно,

$$\|(J+\varepsilon A_2)v'\|_{L_2(0,T;V^{-1})} = \|\xi f + \xi B(v) - 2\nu Dv\|_{L_2(0,T;V^{-1})}.$$

Оценим правую часть последнего равенства. В силу оценки (2.1.16), мы получим:

$$\|\xi f + \xi B(v) - 2\nu Dv\|_{L_2(0,T;V^{-1})} \leqslant \\ \leqslant \|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \|B(v)\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + C_{17}\|v\|_{L_2(0,T;V^1)}. \qquad (2.5.35)$$

Отдельно оценим величину $\|B(v)\|_{L_2(0,T;V^{-1})}$. Используя (2.5.23), а также непрерывность вложения $V^2 \subset L_4(\Omega)$, имеем:

$$\|B(v)\|_{L_2(0,T;V^{-1})} = \Big(\int\limits_0^T \|B(v)\|^2_{V^{-1}}\,dt\Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant C_3\Big(\int\limits_0^T \|v(t)\|^4_{L_4(\Omega)}\,dt\Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant C_{18}\Big(\int\limits_0^T \|v(t)\|^4_{V^2}\,dt\Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant C_{18}T^{\frac{1}{2}} \max_{t\in[0,T]} \|v(t)\|^2_{V^2} = C_{18}T^{\frac{1}{2}}\|v\|^2_{C([0,T];V^2)}.$$

Перепишем неравенство (2.5.35) в следующем виде

$$\|\xi f + \xi B(v) - 2\nu Dv\|_{L_2(0,T;V^{-1})} \leqslant$$
$$\leqslant C_{19}(\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + C_{18}T^{1/2}\|v\|^2_{C([0,T];V^2)} + \|v\|_{L_2(0,T;V^1)}).$$

Из априорных оценок (2.5.25) и (2.5.27) непосредственно следует, что

$$\|(J+\varepsilon A_2)v'\|_{L_2(0,T;V^{-1})} \leqslant C_{14}\Big(1+\frac{1}{\varepsilon}\Big)\Big(\|v_0\|^2_{V^0} + \|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})}\Big) +$$
$$+ C_{14}\sqrt{\varepsilon}\|v_0\|_{V^2} + C_{14}\|v_0\|^2_{V^2}.$$

Для доказательства оценки (2.5.30) осталось воспользоваться левой частью оценки (2.5.21) для $p = 2$:

$$\varepsilon\|v'\|_{L_2(0,T;V^3)} \leqslant \|(J+\varepsilon A_2)v'\|_{L_2(0,T;V^{-1})} \leqslant$$
$$\leqslant C_{14}\Big(1+\frac{1}{\varepsilon}\Big)\Big(\|v_0\|^2_{V^0} + \|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})}\Big) + C_{14}\sqrt{\varepsilon}\|v_0\|_{V^2} + C_{14}\|v_0\|^2_{V^2}.$$

Следовательно, установлено неравенство (2.5.30).

Перейдем к доказательству оценки (2.5.31). Представим функцию $v \in \overline{E_1}$ следующим образом:

$$v(t) = v_0 - \int\limits_0^t v'(s)\,ds.$$

Тогда

$$\|v(t)\|_{V^3} \leqslant \Big\|v_0 - \int\limits_0^t v'(s)\,ds\Big\|_{V^3} \leqslant \|v_0\|_{V^3} + \int\limits_0^t \|v'(s)\|_{V^3}\,ds \leqslant$$
$$\leqslant \|v_0\|_{V^3} + T^{\frac{1}{2}}\|v'\|_{L_2(0,T;V^3)}.$$

Так как правая часть полученного неравенства не зависит от t, то перейдем к максимуму по $\tau \in [0,T]$ в левой части. Тогда с учетом оценки (2.5.30) получим

$$\max_{t\in[0,T]}\|v(t)\|_{V^3} \leqslant \|v_0\|_{V^3} + \frac{C_{14}T^{\frac{1}{2}}}{\varepsilon}\Big(1+\frac{1}{\varepsilon}\Big)\Big(\|v_0\|^2_{V^0} + \|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})}\Big) + \\ + \frac{C_{14}T^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\varepsilon}}\|v_0\|_{V^2} + \frac{C_{14}T^{\frac{1}{2}}}{\varepsilon}\|v_0\|^2_{V^2}.$$

Таким образом, установлена оценка (2.5.31).

Теперь мы докажем неравенство (2.5.32). Как и ранее $v \in \overline{E_1}$ — решение операторного уравнения (2.5.34). Тогда

$$\|v'\|_{L_2(0,T;V^{-1})} \leqslant \|\xi f + \xi B(v) - 2\nu Dv - \varepsilon A^2 v'\|_{L_2(0,T;V^{-1})} \leqslant \\ \leqslant \|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \|B(v)\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + 2\nu\|Dv\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \\ + \varepsilon\|A^2 v'\|_{L_2(0,T;V^{-1})}. \tag{2.5.36}$$

Отдельно рассмотрим слагаемые в правой части последнего неравенства. Сначала напомним оценку на $\|B(v)\|_{L_2(0,T;V^{-1})}$:

$$\|B(v)\|_{L_2(0,T;V^{-1})} = \Big(\int_0^T \|B(v)\|^2_{V^{-1}}\,dt\Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant C_3\Big(\int_0^T \|v(t)\|^4_{L_4(\Omega)}\,dt\Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant C_{18}\Big(\int_0^T \|v(t)\|^4_{V^2}\,dt\Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant C_{18}T^{\frac{1}{2}}\max_{t\in[0,T]}\|v(t)\|^2_{V^2} = C_{18}T^{\frac{1}{2}}\|v\|^2_{C([0,T];V^2)}.$$

Оценим величину в правой части последнего неравенства. Для этого воспользуемся левой частью оценки (2.5.22) для $p = 2$. Таким образом, для получения оценки на $\varepsilon\|v'\|_{L_2(0,T;V^3)}$ необходимо получить оценку на величину $\|(J+\varepsilon A_2)v'\|_{L_2(0,T;V^{-1})}$. Для этого мы вновь воспользуемся операторным уравнением (2.5.34). Из его вида следует, что

$$\varepsilon\|v'\|_{L_2(0,T;V^3)} \leqslant \|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \|B(v)\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \\ + 2\nu\|Dv\|_{L_2(0,T;V^{-1})}.$$

Таким образом,

$$\varepsilon\|A^2 v'\|_{L_2(0,T;V^{-1})} \leqslant \varepsilon\|v'\|_{L_2(0,T;V^3)} \leqslant \|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \\ + \|B(v)\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + 2\nu\|Dv\|_{L_2(0,T;V^{-1})}. \tag{2.5.37}$$

Итак, из (2.5.36) и (2.5.37) и априорных оценок (2.5.25) и (2.5.27), получим

$$\|v'\|_{L_2(0,T;V^{-1})} \leqslant 2(\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \|B(v)\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + 2\nu\|Dv\|_{L_2(0,T;V^{-1})}) \leqslant$$
$$\leqslant C_{19}(\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \|v\|_{L_2(0,T;V^1)} + \|v\|^2_{C([0,T];V^2)}) \leqslant$$
$$\leqslant C_{20}(\|v_0\|^2_{V^0} + \varepsilon\|v_0\|^2_{V^2} + \|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} + 1).$$

Что и доказывает неравенство (2.5.32), где $C_{15} = C_{20}$.

Наконец, вновь применяя для правой части (2.5.37) априорные оценки (2.5.25) и (2.5.26), получим

$$\varepsilon\|v'\|_{L_2(0,T;V^3)} \leqslant 2(\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \|B(v)\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + 2\nu\|Dv\|_{L_2(0,T;V^{-1})}) \leqslant$$
$$\leqslant C_{21}(\|v_0\|^2_{V^0} + \varepsilon\|v_0\|^2_{V^2} + \|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} + 1).$$

Таким образом, установлено неравенство (2.5.33), где $C_{16} = C_{21}$. Лемма доказана. □

Лемма 2.5.5. *Пусть $v_0 \in V^3$, $f \in L_2(0,T;V^{-1})$. Тогда для любого $v \in \overline{E_1}$ операторного уравнения (2.5.17) имеет место оценка:*

$$\|v\|_{\overline{E_1}} \leqslant C_{22}, \tag{2.5.38}$$

где $C_{22} > 0$ — некоторая постоянная, зависящая от ε.

Теорема 2.5.3. *Операторное уравнение* (2.5.17) *имеет хотя бы одно решение $v \in \overline{E_1}$.*

Доказательство. Для доказательства данной теоремы воспользуемся теорией топологической степени Лере–Шаудера для вполне непрерывных векторных полей.

В силу априорной оценки (2.5.38) все решения семейства уравнений (2.5.18):

$$L(v) + \xi K(v) = \lambda(f, v_0), \quad \text{где} \quad \xi \in [0,1],$$

лежат в шаре $B_R \subset \overline{E_1}$ радиуса $R = C_{22} + 1$ с центром в нуле. И, следовательно, все решения семейства уравнений

$$v - \xi L^{-1}[-K(v) + (f, v_0)] = 0, \quad \text{где} \quad \xi \in [0,1],$$

лежат в том же шаре B_R.

В силу третьего пункта леммы 2.5.2 отображение $[-K(\cdot)+(f,v_0)] : \overline{E_1} \to L_2(0,T;V^{-3}) \times V^3$ является компактным.

В силу четвертого пункта леммы 2.5.1 оператор $L^{-1} : L_2(0,T;V^{-3})\times V^3 \to \overline{E_1}$ непрерывен.

Таким образом отображение $L^{-1}\left[-K(\cdot)+(f,v_0)\right] : \overline{E_1} \to \overline{E_1}$ компактно. Тогда отображение

$$G : [0,1]\times \overline{E_1} \to \overline{E_1}, \quad G(\xi,v) = \xi L^{-1}\left[-K(v)+(f,v_0)\right]$$

компактно по совокупности переменных ξ и v.

Из вышесказанного получаем, что компактное векторное поле $\Phi(\xi,v) = v - G(\xi,v)$ невырождено на границе шара B_R. Следовательно, для него определена топологическая степень Лере–Шаудера $\deg_{LS}(\Phi,B_R,0)$. По свойству гомотопической инвариантности степени получим, что

$$\deg_{LS}(\Phi(0,\cdot),B_R,0) = \deg_{LS}(\Phi(1,\cdot),B_R,0).$$

Вспомним, что $\Phi(0,\cdot) = I$ и по условию нормировки:

$$\deg_{LS}(I,B_R,0) = 1.$$

Отсюда,

$$\deg_{LS}(\Phi(1,\cdot),B_R,0) = 1.$$

Таким образом получили, что существует хотя бы одно решение $v \in \overline{E_1}$ уравнения

$$v - L^{-1}\left[-K(v)+(f,v_0)\right] = 0$$

и, следовательно, операторного уравнения (2.5.17). □

Поскольку существует решение $v \in \overline{E_1}$ операторного уравнения (2.5.17), то из вышеприведенных рассуждений следует, что аппроксимационная задача имеет хотя бы одно решение $v \in \overline{E_1}$.

Перейдем непосредственно к доказательству разрешимости начально–краевой задачи (2.5.9)–(2.5.11). Для этого осуществим предельный переход во вспомогательной задаче (2.5.13)–(2.5.15) при $\xi = 1$. Поскольку пространство V^3 плотно в V^0, то для каждого $v_0^* \in V^0$ существует последовательность $v_0^m \in V^3$, сходящаяся к v_0^* в V^0. Если $v_0^* \equiv 0$, то положим $v_0^m \equiv 0$, $\varepsilon_m = 1/m$.

Если же $\|v_0^*\|_{V^0} \neq 0$, то начиная с некоторого номера $\|v_0^m\|_{V^2} \neq 0$. Тогда положим $\varepsilon_m = 1/(m\|v_0^m\|^2_{V^2})$. В силу нашего выбора полученная последовательность $\{\varepsilon_m\}$ сходится к нулю при $m \to \infty$. Причем $\varepsilon_m\|v_0^m\|^2_{V^2} \leqslant 1$.

По теореме 2.5.3 при каждом ε_m и v_0^m существует решение $v_m \in \overline{E_1} \subset E_1$ вспомогательной задачи (2.5.13)–(2.5.15) при $\xi = 1$. Таким образом, каждое решение v_m для всех $\varphi \in V^1$ при почти всех $t \in (0,T)$ удовлетворяет равенству

$$\langle v_m', \varphi\rangle - \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n (\Delta_\alpha^{-1} v_m)_i (v_m)_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\,dx + 2\int\limits_\Omega \nu(\theta)\mathcal{E}(v_m) : \mathcal{E}(\varphi)\,dx -$$
$$-\varepsilon_m \int\limits_\Omega \nabla\Delta v_m' : \nabla\varphi\,dx = \langle f, \varphi\rangle, \tag{2.5.39}$$

и начальному условию

$$v_m|_{t=0} = v_0^m.$$

Так как последовательность $\{v_0^m\}$ сходится в V^0, то она ограничена по норме V^0. Следовательно,

$$\|v_0^m\|^2_{V^0} + \varepsilon_m\|v_0^m\|^2_{V^2} \leqslant C_{23}.$$

Таким образом, из оценок (2.5.25), (2.5.26), (2.5.32) и (2.5.33) получаем, что

$$\|v_m\|^2_{L_2(0,T;V^1)} \leqslant C_{24}(\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} + 1), \tag{2.5.40}$$
$$\|v_m\|^2_{C([0,T];V^0)} \leqslant C_{25}(\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} + 1), \tag{2.5.41}$$
$$\|v_m'\|_{L_2(0,T;V^{-1})} \leqslant C_{26}(\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} + 1), \tag{2.5.42}$$
$$\varepsilon\|v_m'\|_{L_2(0,T;V^3)} \leqslant C_{27}(\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} + 1), \tag{2.5.43}$$

где константы $C_{24} - C_{27}$ не зависят от ε. В силу непрерывности вложения $C([0,T];V^0) \subset L_\infty(0,T;V^0)$ и оценок (2.5.40)–(2.5.42), без ограничения общности (если необходимо переходя к подпоследовательности) получим, что

$$v_m \to v_* \quad \text{слабо в} \quad L_2(0,T;V^1) \quad \text{при} \quad m \to \infty,$$
$$v_m \to v_* \quad *\text{-слабо в} \quad L_\infty(0,T;V^0) \quad \text{при} \quad m \to \infty,$$
$$v_m' \to v_*' \quad \text{слабо в} \quad L_2(0,T;V^{-1}) \quad \text{при} \quad m \to \infty,$$

и что предельная функция v_* принадлежит пространству E_1.

Перейдем к пределу в каждом слагаемом (2.5.39).

При $m \to \infty$ по определению слабой сходимости $v_m \to v^*$ в $L_2(0,T;V^1)$ получим

$$\int\limits_\Omega \nu(\theta)\mathcal{E}(v_m) : \mathcal{E}(\varphi)\,dx \to \int\limits_\Omega \nu(\theta)\mathcal{E}(v_*) : \mathcal{E}(\varphi)\,dx$$

для любого $\varphi \in V^1$.

В силу слабой сходимости $v_m' \to v_*'$ в $L_2(0,T;V^{-1})$ при $m \to \infty$ получим, что

$$\langle v_m', \varphi\rangle \to \langle v_*', \varphi\rangle$$

для любого $\varphi \in V^1$.

Далее, используя оценку (2.5.43), без ограничения общности и в случае необходимости переходя к подпоследовательности, мы имеем, что существует функция $u \in L_2(0,T;V^3)$ такая, что

$$\varepsilon_m v_m' \to u \quad \text{слабо в} \quad L_2(0,T;V^3) \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Тогда

$$\varepsilon_m \langle \nabla\Delta v_m', \nabla\varphi\rangle \to \langle \nabla\Delta u, \nabla\varphi\rangle, \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Однако последовательность $\varepsilon_m v_m'$ сходится к нулю в смысле распределений на отрезке $[0,T]$ со значениями в V^{-3}. Действительно для любой гладкой скалярной функции ψ с компактным носителем и $\varphi \in V^3$, мы получим

$$\lim_{m\to\infty}\left|\varepsilon_m \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \nabla\Delta v_m' : \nabla\varphi\,dx\psi(t)\,dt\right| = \lim_{m\to\infty}\varepsilon_m\left|\int\limits_0^T \int\limits_\Omega \Delta v_m'\Delta\varphi\,dx\psi(t)\,dt\right| =$$

$$= \lim_{m\to\infty}\varepsilon_m\left|\int\limits_0^T \int\limits_\Omega \nabla v_m' : \nabla\Delta\varphi\,dx\psi(t)\,dt\right| =$$

$$= \lim_{m\to\infty}\varepsilon_m \lim_{m\to\infty}\left|\int\limits_0^T \int\limits_\Omega \nabla v_m' : \nabla\Delta\varphi\,dx\psi(t)\,dt\right| =$$

$$= \lim_{m\to\infty}\varepsilon_m \lim_{m\to\infty}\left|\int\limits_\Omega \left(\int\limits_0^T \nabla v_m'\psi(t)\,dt\right) : \nabla\Delta\varphi\,dx\right| =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \varepsilon_m \lim_{m\to\infty} \Bigg| \int\limits_\Omega \Bigg(\int\limits_0^T \nabla v_m \frac{\partial \psi(t)}{\partial t}\, dt \Bigg) : \nabla\Delta\varphi\, dx \Bigg| =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \varepsilon_m \lim_{m\to\infty} \Bigg| \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \nabla v_m : \nabla\Delta\varphi\, dx \frac{\partial \psi(t)}{\partial t}\, dt \Bigg|.$$

Так как v_m слабо сходится к v^* в $L_2(0,T;V^1)$ и, следовательно, сходится к v^* в смысле распределений, то

$$\lim_{m\to\infty} \varepsilon_m \lim_{m\to\infty} \Bigg| \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \nabla v_m : \nabla\Delta\varphi\, dx \psi(t)\, dt \Bigg| =$$

$$= \Bigg| \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \nabla v_* : \nabla\Delta\varphi\, dx \frac{\partial \psi(t)}{\partial t}\, dt \Bigg| \lim_{m\to\infty} \varepsilon_m = 0.$$

Таким образом, в силу единственности слабого предела

$$\varepsilon_m \langle \nabla\Delta v_m', \nabla\varphi \rangle \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Так как вложение $V^1 \subset L_4(\Omega)$ является вполне непрерывным, а вложение $L_4(\Omega) \subset V^{-1}$ — непрерывно, то по теореме 1.1.5 следует, что

$$F = \{v \in L_2(0,T;V^1), v' \in L_2(0,T;V^{-1})\} \subset L_2(0,T;L_4(\Omega)).$$

Тогда, учитывая оценки (2.5.41) и (2.5.42) заключаем, что

$$v_m \to v_* \quad \text{сильно в} \quad L_2(0,T;L_4(\Omega)).$$

В силу того, что оператор $\Delta_\alpha^{-1} = (I - \alpha^2\Delta)^{-1} : L_2(0,T;V^1) \to L_2(0,T;V^3)$ является непрерывным, то

$$\int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n (\Delta_\alpha^{-1} v_m)_i (v_m)_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx \to \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n (\Delta_\alpha^{-1} v_*)_i (v_*)_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx \quad \text{при} \quad m \to \infty,$$

где первая последовательность $(\Delta_\alpha^{-1} v_m)_i$ слабо сходится в $L_2(0,T;V^1)$, а вторая $(v_m)_j$ — сильно в $L_2(0,T;L_4(\Omega))$. Следовательно, их произведение сходится слабо к произведению пределов.

В итоге показали, что функция v_* удовлетворяет равенству:

$$\langle v_*', \varphi\rangle - \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n (\Delta_\alpha^{-1} v_*)_i (v_*)_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx + 2\int\limits_\Omega \nu(\theta)\mathcal{E}(v_*) : \mathcal{E}(\varphi)\, dx = \langle f, \varphi\rangle. \tag{2.5.44}$$

Так как для последовательности $\{v_m\}$ имеют место априорные оценки (2.5.40), (2.5.41) и (2.5.42), то в силу свойств слабой сходимости для v_* непосредственно получаем оценку:

$$\|v_*\|_{L_2(0,T;V^1)} + \|v_*\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \|v_*'\|_{L_2(0,T;V^{-1})} \leqslant C_{28}(\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + 1).$$

Откуда следует, что $v_* \in E_1$. Таким образом, теорема 2.5.2 доказана.

2.5.3 Доказательство разрешимости начально–краевой задачи (2.5.5)–(2.5.6)

Рассмотрим следующую начально–краевую задачу при фиксированных $\hat\theta \in E_2$ и $v \in E_1$:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} - \chi \triangle \theta = \big(\nu(\hat\theta)\mathcal{E}(v)\big) : \mathcal{E}(v) + g; \tag{2.5.45}$$

$$\theta|_{t=0} = \theta_0, \quad \theta|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0. \tag{2.5.46}$$

Слабое решение задачи (2.5.45)–(2.5.46) определим как $\theta \in E_2$, удовлетворяющую тождеству (2.5.8) и начальному условию $\theta|_{t=0} = \theta_0$.

Для начально–краевой задачи (2.5.45)–(2.5.46) справедлива следующая теорема.

Теорема 2.5.4. *Пусть* $g \in L_1(0,T; H_p^{-2(1-1/p)}(\Omega))$, $\theta_0 \in W_p^{1-2/p}(\Omega)$, $\hat\theta \in E_2$, $v \in E_1$. *Тогда при* $1 < p < 4/3$ *для* $n = 2$ *и при* $1 < p < 10/9$ *для* $n = 3$ *задача* (2.5.45)–(2.5.46) *имеет по крайней мере одно слабое решение и справедлива оценка*

$$\|\theta\|_{E_2} \le R_2(\|g\|_{L_1(0,T;H_p^{-2(1-1/p)}(\Omega))} + \|\partial v/\partial t\|^2_{L_2(0,T;H)} + \|\theta_0\|_{W_p^{1-2/p}(\Omega)}). \tag{2.5.47}$$

Доказательство данной теоремы приведено в работе [151]. Отметим, что при исследовании слабой разрешимости задачи (2.1.26)–(2.1.27) в правой части (2.1.26) появляются слагаемые из $L_1(Q_T)$, что вызывает существенные трудности.

2.5.4 Построение последовательных приближений

Рассмотрим последовательность $(v^n, \theta^n), n = 0, 1, 2, \ldots,$ определяемую следующим образом. Пусть v^0 и θ^0 означают начальные значения v_0 и θ_0 для v и θ из (2.5.11) и (2.5.46), соответственно. Пусть (v^n, θ^n) известны. Тогда вначале находится v^{n+1} как слабое решение задачи

$$\frac{\partial v^{n+1}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} u_i^{n+1} \frac{\partial v^{n+1}}{\partial x_i} - 2\mathrm{Div}\,(\nu(\theta^n)\mathcal{E}(v^{n+1})) + \mathrm{grad}\, p = f; \tag{2.5.48}$$

$$\mathrm{div}\, v^{n+1} = 0; \quad v^{n+1} = u^{n+1} - \alpha^2 \Delta u^{n+1}; \tag{2.5.49}$$

$$v^{n+1}|_{t=0} = v_0; \quad v^{n+1}|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0, \tag{2.5.50}$$

затем, при найденном v^{n+1} находится θ^{n+1} как слабое решение задачи

$$\frac{\partial \theta^{n+1}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i^{n+1} \frac{\partial \theta^{n+1}}{\partial x_i} - \chi \triangle\, \theta^{n+1} = 2\nu(\theta^n)\mathcal{E}(v^{n+1}) : \mathcal{E}(v^{n+1}) + g; \tag{2.5.51}$$

$$\theta^{n+1}|_{t=0} = \theta_0; \quad \theta^{n+1}|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0. \tag{2.5.52}$$

Отметим, что слабым решением задачи (2.5.48)–(2.5.50) называется функция $v^{n+1} \in E_1$, удовлетворяющая соотношению (2.5.7) и начальному условию $v^{n+1}|_{t=0} = v_0$, а слабым решением задачи (2.5.51)–(2.5.52) называется функция $\theta^{n+1} \in E_2$, удовлетворяющая соотношению (2.5.8) и начальному условию $\theta^{n+1}|_{t=0} = \theta_0$.

Разрешимость задачи (2.5.48)–(2.5.50) следует из теоремы 2.5.2. При найденной функции v^{n+1} выполнены все требования теоремы 2.5.4. Отсюда следует, что задача (2.5.51)–(2.5.52) также разрешима.

2.5.5 Предельный переход

Рассмотрим теперь последовательность (v^n, θ^n), $n = 1, 2, \ldots,$ где v^n – решение задачи (2.5.48)–(2.5.50), а θ^n – решение задачи (2.5.51)–(2.5.52). Изучим вопрос о сходимости последовательности (v^n, θ^n). Рассмотрим последовательность $\{\theta^n\}$.

Лемма 2.5.6. *Последовательность $\{\theta^n\}$ относительно компактна в $L_p(0, T; L_p(\Omega))$, где p удовлетворяет условиям теоремы 2.5.4.*

Рассмотрим теперь v^n. В силу оценки (2.5.12) можно считать (без ограничения общности), что v^n слабо сходится в $L_2(0,T;V^1)$, а $\partial v^n/\partial t$ слабо сходится в $L_2(0,T;V^{-1})$. Покажем, что подпоследовательность v^n сходится к v, где v – это решение задачи (2.5.48)–(2.5.50) при $\theta \in E_2$ и $\theta = \lim \theta^n$.

Так как v^n решение задачи (2.5.48)–(2.5.50), следовательно справедливо следующее равенство:

$$\int\limits_0^T \int\limits_\Omega \frac{\partial v^n}{\partial t}\,\varphi\,dx\,dt - \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n u_i^n v_j^n \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\,dx\,dt + \\ + 2\int\limits_0^T \int\limits_\Omega \nu(\theta^n)\mathcal{E}(v^n) : \mathcal{E}(\varphi)\,dx\,dt = \langle f, \varphi\rangle. \quad (2.5.53)$$

В силу теоремы Симона 1.1.5 (при необходимости переходя к подпоследовательностям) $v^n \to v$ сильно в $C([0,T], L_4(\Omega))$. Таким образом, v^n сходится к v сильно в $C([0,T], L_4(\Omega)^n)$, а u^n сходится к u слабо в $C([0,T]; V^{-1})$. Тогда произведение этих последовательностей сходится слабо к произведению пределов. Следовательно, в равенстве (2.5.53) в каждом слагаемом можно перейти к пределу. Продифференцировав полученное равенство по $t \in [0,T]$, получим, что предельная функция $v \in E_1$ будет удовлетворять равенству (2.5.7), и, следовательно, будет являться слабым решением задачи (2.5.48)–(2.5.50).

Для того, чтобы обосновать предельный переход в задаче (2.5.51)–(2.5.52), нам понадобится более сильный результат о сходимости v^n. Имеет место

Лемма 2.5.7. *Последовательность v^n сильно сходится в $L_2(0,T;V^1)$ к $v \in E_1$.*

Доказательство этого факта производится аналогично доказательству теоремы 2.1.7.

Покажем, что полученное при предельном переходе $\theta \in E_2$, является слабым решением задачи (2.5.45)–(2.5.46). Так как θ^n является решением задачи (2.5.51)–(2.5.52) для него справедливо равенство (2.5.8). Рассмотрим бесконечно дифференцируемую по t и x на Q_T функцию $\psi(t,x)$, удовлетворяющую условиям $\psi(0,\cdot) = \psi(T,\cdot) = 0$ и $\psi|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0$. Умножим (2.5.8) на $\psi(t,x)$, проинтегрируем на [0,T] и упростим:

$$-\int_0^T (\theta^n,\phi)\frac{\partial\psi}{\partial t}\,dt - \int_0^T \sum_{i=1}^n (u_i^n\theta^n,\frac{\partial\phi}{\partial x_i})\psi\,dt + \chi\int_0^T \sum_{i=1}^n (\frac{\partial\theta^n}{\partial x_i},\frac{\partial\phi}{\partial x_i})\,\psi\,dt =$$

$$= \int_0^T \langle g,\phi\rangle\psi\,dt + 2\int_0^T \nu(\theta^{n-1})\mathcal{E}(v^n):\mathcal{E}(v^n),\phi)\psi\,dt, \quad \phi\in C_0^\infty(\Omega).$$

Из сильной сходимости v^n в $L_2(0,T;V^1)$ и θ^n в $L_p(0,T;\ L_p(\Omega))$ и слабой сходимости u^n к u^v в $C([0,T];V^{-1})$ и θ^n к θ в $L_p(0,T;W_p^1(\Omega))$, где p удовлетворяет условиям теоремы 2.5.4, вытекает возможность предельного перехода во всех слагаемых. Из последнего равенства в силу произвольности ψ вытекает справедливость соотношения (2.5.8).

Это и завершает доказательство теоремы 2.5.1.

2.6 Существование оптимального управления с обратной связью для термо–модели Лере

В данном параграфе на основе аппроксимационно–топологического подхода к проблемам математической гидродинамики доказывается существование оптимального управления с обратной связью для задачи (2.5.1)–(2.5.6). Сначала сформулируем понятие решения для рассматриваемой задачи и основной результат данного параграфа.

2.6.1 Постановка задачи

Аналогично пункту 2.2.1 рассмотрим многозначное отображение $\Psi : W_1 \multimap W_2$ в качестве функции управления (W_1 и W_2 — нормированные пространства), удовлетворяющее следующим условиям:

(Ψ1) Отображение Ψ определено на пространстве W_1 и имеет непустые, компактные, выпуклые значения;

(Ψ2) Отображение Ψ полунепрерывно сверху и компактно;

(Ψ3) Отображение Ψ глобально ограничено;

(Ψ4) Отображение Ψ слабо замкнуто.

Для нашей задачи рассмотрим два таких многозначных отображения: $F : E_1 \multimap L_2(0,T;V^{-1})$ и $G : E_2 \multimap L_2(0,T;W_p^{-1}(\Omega))$, удовлетворяющих ($\Psi$1)–($\Psi$4). Мы будем рассматривать слабую постановку задачи оптимального управления с обратной связью для начально–краевой задачи (2.5.1)–(2.5.6). Под обратной связью мы понимаем следующее условие:

$$f \in F(v), \qquad g \in G(\theta). \tag{2.6.1}$$

Определение 2.6.1. *Решением задачи управления с обратной связью* (2.5.1)–(2.5.6), (2.6.1) *называется* (v,θ,f,g), *где*

$$v \in E_1, \quad \theta \in E_2, \quad f \in L_2(0,T;V^{-1}), \quad g \in L_1(0,T;W_p^{-1}(\Omega)),$$

удовлетворяющая при всех $\varphi \in V$, $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ *и почти всех* $t \in [0,T]$

условиям обратной связи (2.6.1), *соотношениям*

$$\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial t}\,\varphi\,dx - \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n (\Delta_\alpha^{-1} v)_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\,dx + \\ + 2\int_\Omega \nu(\theta)\mathcal{E}(v) : \mathcal{E}(\varphi)\,dx = \langle f(t), \varphi\rangle, \quad (2.6.2)$$

$$\int_\Omega \frac{\partial \theta}{\partial t}\phi\,dx - \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i\theta_j \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i}\,dx + \chi\int_\Omega \mathcal{E}(\theta) : \mathcal{E}(\phi)\,dx = \\ = 2\int_\Omega \big(\nu(\theta)\mathcal{E}(v) : \mathcal{E}(v)\big) : \phi\,dx + \langle g, \phi\rangle, \quad (2.6.3)$$

и начальным условиям $v|_{t=0} = v_0$ *и* $\theta|_{t=0} = \theta_0$.

Первым результатом настоящего параграфа является следующая теорема:

Теорема 2.6.1. *Пусть функция* $\nu(\theta) \in C^2(-\infty, +\infty)$ *и* $0 < \nu(\theta) \leq M$, $v_0 \in V^1$, $\theta_0 \in W_p^{1-2/p}(\Omega)$. *Также пусть многозначные отображения* F *и* G *удовлетворяют условиям* (Ψ1)–(Ψ4). *Тогда при* $1 < p < 4/3$ *для* $n = 2$ *и при* $1 < p < 10/9$ *для* $n = 3$ *существует слабое решение задачи управления с обратной связью* (2.5.1)–(2.5.6), (2.6.1).

Обозначим через $\Sigma \subset E_1 \times E_2 \times L_2(0, T; V^{-1}) \times L_1(0, T; W_p^{-1}(\Omega))$ множество всех слабых решений задачи (2.5.1)–(2.5.6), (2.6.1). Рассмотрим произвольный функционал качества $\Phi : \Sigma \to \mathbb{R}$, удовлетворяющий следующим условиям:

(Φ1) Существует число γ такое, что $\Phi(v, \theta, f, g) \geqslant \gamma$ для всех $(v, \theta, f, g) \in \Sigma$.

(Φ2) Если $v_m \rightharpoonup v_*$ в E_1, $\theta_m \to \theta_*$ в $L_p(0, T; L_p(\Omega))$, $\theta_m \rightharpoonup \theta_*$ в $L_p(0, T; W_p^1(\Omega))$, $f_m \to f_*$ в $L_2(0, T; V^{-1})$ и $g_m \to g$ в $L_1(0, T; W_p^1(\Omega))$, p — удовлетворяет условиям теоремы 2.6.1, то

$$\Phi(v_*, \theta_*, f_*, g_*) \leqslant \varliminf_{m\to\infty} \Phi(v_m, \theta_m, f_m, g_m).$$

Основным результатом данного параграфа является следующая теорема.

Теорема 2.6.2. *Пусть выполнены условия теоремы 2.6.1 и пусть функционал* Φ *удовлетворяет условиям* (Φ1)–(Φ2), *тогда задача оптимального управления с обратной связью* (2.5.1)–(2.5.6), (2.6.1) *имеет хотя бы одно слабое решение* $(v_*, \theta_*, f_*, g_*)$ *такое, что*

$$\Phi(v_*, \theta_*, f_*, g_*) = \inf_{(v,\theta,f,g)\in\Sigma} \Phi(v, \theta, f, g).$$

Доказательство теоремы 2.6.1 проводится поэтапно. На первом этапе устанавливается разрешимость задачи (2.5.1)–(2.5.4), (2.6.1) с известной $\theta \in E_2$. Затем устанавливается разрешимость задачи (2.5.5)–(2.5.6), (2.6.1) с заданной $v \in E_1$. Далее, описывается итерационный процесс, состоящий в последовательном решении вышеприведенных задач, и, наконец, доказывается сходимость последовательных приближений к решению задачи (2.5.1)–(2.5.6), (2.6.1).

2.6.2 Доказательство разрешимости задачи (2.5.1)–(2.5.4), (2.6.1)

Рассмотрим задачу (2.5.1)–(2.5.4), (2.6.1) при фиксированной $\theta \in E_2$:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - 2\mathrm{Div}\ (\nu(\theta)\mathcal{E}(v)) + (u \cdot \nabla)v + \nabla p = f; \tag{2.6.4}$$

$$f \in F(v); \quad \mathrm{div}\ v = 0; \quad v = u - \alpha^2 \Delta u; \tag{2.6.5}$$

$$v|_{t=0} = v_0; \quad v|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0. \tag{2.6.6}$$

Слабое решение задачи (2.6.4)–(2.6.6) определим как пару функций $(v, f) \in E_1 \times L_2(0, T; V^{-1})$, удовлетворяющих условию обратной связи (2.6.1), соотношению (2.6.2) и начальному условию $v|_{t=0} = v_0$.

Для данной задачи справедлива следующая теорема.

Теорема 2.6.3. *Пусть функция* $\nu(\theta) \in C^2(-\infty, +\infty)$ *и* $0 < \nu(\theta) \leq M$, $f \in L_2(0, T; V^{-1})$, $v_0 \in V^1$, $\theta \in E_2$. *Тогда задача* (2.6.4)–(2.6.6) *имеет по крайней мере одно слабое решение, для которого справедлива оценка*

$$\|v\|_{E_1} \leqslant R_1, \quad R_1 = R_1(T, \|v_0\|_{V^1}). \tag{2.6.7}$$

Доказательство данной теоремы состоит из нескольких частей. Сначала на основе аппроксимационно–топологического подхода к исследованию математических задач гидродинамики доказывается существование слабых решений вспомогательных задач, зависящих от малого параметра $\varepsilon > 0$. Далее, на основе необходимых оценок устанавливается предельный переход. Рассмотрим следующее вспомогательное семейство систем уравнений $(0 \leqslant \xi \leqslant 1)$ с малым параметром $\varepsilon > 0$:

$$\varepsilon\frac{\partial \Delta^2 v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial t} + \xi\sum_{i=1}^{n}(\Delta_\alpha^{-1} v)_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - 2\mathrm{Div}\ (\nu(\theta)\mathcal{E}(v)) + \nabla p = \xi f, \tag{2.6.8}$$

$$f \in F(v); \quad \operatorname{div} v = 0, \quad t \in [0,T], \quad x \in \Omega, \tag{2.6.9}$$

$$v|_{\partial\Omega} = 0, \quad \Delta v|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \in [0,T] \quad v|_{t=0} = v_0, \quad x \in \Omega. \tag{2.6.10}$$

Для данного семейства рассмотрим еще одно функциональное пространство:

$$\overline{E_1} = \{v \in C([0,T]; V^3), \quad v' \in L_2(0,T; V^3)\}$$

с нормой $\|v\|_{\overline{E_1}} = \|v\|_{C(0,T;V^3)} + \|v'\|_{L_2(0,T;V^3)}$.

По аналогии с определением слабого решения для задачи (2.6.4)–(2.6.6), мы сформулируем определение слабого решения *вспомогательной задачи* (2.6.8)–(2.6.10) при фиксированном $0 \leqslant \xi \leqslant 1$.

Определение 2.6.2. *Пара функций* $(v, f) \in \overline{E_1} \times L_2(0,T; V^{-1})$, *которая для любого* $\varphi \in V^1$ *и почти всех* $t \in (0,T)$ *удовлетворяет условию обратной связи* (2.6.1), *равенству*

$$\langle v', \varphi \rangle - \xi \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n (\Delta_\alpha^{-1} v)_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx + 2 \int\limits_\Omega \nu(\theta) \mathcal{E}(v) : \mathcal{E}(\varphi)\, dx -$$
$$- \varepsilon \int\limits_\Omega \nabla \Delta v' : \nabla \varphi\, dx = \xi \langle f, \varphi \rangle \tag{2.6.11}$$

и начальному условию $v|_{t=0} = v_0$, *называется слабым решением вспомогательной задачи (2.6.8)–(2.6.10).*

Для доказательства существования слабого решения вспомогательной задачи (2.6.8)–(2.6.10) при $\xi = 1$, перепишем вспомогательное семейство в операторной форме. Используя слагаемые в равенстве (2.6.11), мы введем операторы с помощью следующих равенств:

$$J : V^3 \to V^{-1}, \quad \langle Jv, \varphi \rangle = \int\limits_\Omega v\varphi\, dx, \quad v \in V^3, \quad \varphi \in V^1;$$

$$A_2 : V^3 \to V^{-1}, \quad \langle A_2 v, \varphi \rangle = -\int\limits_\Omega \nabla \Delta v : \nabla \varphi\, dx, \quad v \in V^3, \quad \varphi \in V^1;$$

$$B : L_4(\Omega) \to V^{-1}, \quad \langle B(v), \varphi \rangle = \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n (\Delta_\alpha^{-1} v)_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx, \quad v \in L_4(\Omega),\, \varphi \in V^1;$$

$$D : V^3 \to V^{-1}, \quad \langle Dv, \varphi \rangle = \int\limits_\Omega \nu(\theta) \mathcal{E}(v) : \nabla \varphi\, dx, \quad v \in V^3, \varphi \in V^1.$$

Поскольку в (2.6.11) функция $\varphi \in V^1$ произвольна, то при почти всех $t \in (0,T)$ это равенство эквивалентно следующему операторному включению:

$$Jv' + \varepsilon A_2 v' + 2\nu Dv - \xi B(v) = \xi f \in \xi F(v). \tag{2.6.12}$$

Таким образом, слабое решение вспомогательной задачи (2.6.8)–(2.6.10) при фиксированном $0 \leqslant \xi \leqslant 1$ — это решение $(v,f) \in \overline{E_1} \times L_2(0,T;V^{-1})$ операторного включения (2.6.12), удовлетворяющее условию обратной связи (2.6.1) и начальному условию (2.6.10).

Также определим операторы при помощи следующих равенств:

$$L : \overline{E_1} \to L_2(0,T;V^{-1}) \times V^3, \quad L(v) = ((J + \varepsilon A_2)v' + 2\nu Dv, v|_{t=0});$$

$$K : \overline{E_1} \to L_2(0,T;V^{-1}) \times V^3, \quad K(v) = (B(v), 0);$$

$$\mathcal{Y} : \overline{E_1} \to L_2(0,T;V^{-1}) \times V^3; \mathcal{Y}(v) = (F(v), v_0).$$

Тогда задача существования решения $(v,f) \in \overline{E_1} \times L_2(0,T;V^{-1})$ задачи (2.6.8)–(2.6.10) эквивалентна задаче существования решения для следующего операторного включения

$$v \in \xi\mathcal{M}(v), \quad \text{где } \xi\mathcal{M}(v) = L^{-1}(\mathcal{Y}(v) + K(v)). \tag{2.6.13}$$

Замечание 2.6.1. *Заметим, что левая часть операторного включения* (2.6.12) *полностью совпадает с левой частью равенства* (2.5.17)*. Следовательно для операторного включения справедливы следующие теоремы (см. параграф 2.5.2):*

Лемма 2.6.1. *1) Оператор $L : \overline{E_1} \to L_2(0,T;V^{-1}) \times V^3$ обратим и обратный к нему оператор $L^{-1} : L_2(0,T;V^{-1}) \times V^3 \to \overline{E_1}$ является непрерывным оператором. 2) Для любой функции $v \in \overline{E_1}$ функция $B(v) \in L_2(0,T;V^{-1})$ и отображение $B : \overline{E_1} \to L_2(0,T;V^{-1})$ является компактным.*

Лемма 2.6.2. *Пусть $v_0 \in V^3$. Тогда для любого решения $v \in \overline{E_1}$ операторного уравнения (2.6.12) имеют место оценки:*

$$\|v\|_{L_2(0,T;V^1)} \leqslant C_{10}(\|v_0\|_{V^0} + \sqrt{\varepsilon}\|v_0\|_{V^2}); \tag{2.6.14}$$

$$\|v\|_{C([0,T];V^0)} \leqslant C_{11}(\|v_0\|_{V^0} + \sqrt{\varepsilon}\|v_0\|_{V^2}); \tag{2.6.15}$$

$$\varepsilon\|v\|^2_{C([0,T];V^2)} \leqslant C_{12}(\|v_0\|^2_{V^0} + \varepsilon\|v_0\|^2_{V^2}), \tag{2.6.16}$$

где постоянные C_{10}, C_{11}, C_{12} не зависят от ε и ξ.

Лемма 2.6.3. *Пусть $v_0 \in V^3$. Тогда для любого $v \in \overline{E_1}$ операторного уравнения (2.6.12) имеют место оценки*

$$\varepsilon\|v'\|_{L_2(0,T;V^3)} \leqslant C_{14}\Big(1+\frac{1}{\varepsilon}\Big)\|v_0\|^2_{V^0} + C_{14}\sqrt{\varepsilon}\|v_0\|_{V^2} + C_{14}\|v_0\|^2_{V^2}; \qquad (2.6.17)$$

$$\|v\|_{C([0,T];V^3)} \leqslant \|v_0\|_{V^3} + \frac{C_{14}T^{\frac{1}{2}}}{\varepsilon}\Big(1+\frac{1}{\varepsilon}\Big)\|v_0\|^2_{V^0} + $$
$$+\frac{C_{14}T^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\varepsilon}}\|v_0\|_{V^2} + \frac{C_{14}T^{\frac{1}{2}}}{\varepsilon}\|v_0\|^2_{V^2}; \qquad (2.6.18)$$

$$\|v'\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} \leqslant C_{15}(\|v_0\|^2_{V^0} + \varepsilon\|v_0\|^2_{V^2} + 1); \qquad (2.6.19)$$

$$\varepsilon\|v'\|_{L_{4/3}(0,T;V^3)} \leqslant C_{16}(\|v_0\|^2_{V^0} + \varepsilon\|v_0\|^2_{V^2} + 1); \qquad (2.6.20)$$

где постоянные C_{14}, C_{15}, C_{16} не зависят от ε, v и ξ.

Лемма 2.6.4. *Пусть $v_0 \in V^3$. Тогда для любого $v \in \overline{E_1}$ операторного уравнения (2.6.12) имеет место оценка:*

$$\|v\|_{\overline{E_1}} \leqslant C_{22}, \qquad (2.6.21)$$

где $C_{22} > 0$ — некоторая постоянная, зависящая от ε.

Теорема 2.6.4. *Операторное уравнение* (2.6.13) *при* $\xi = 1$ *имеет хотя бы одно решение.*

Доказательство. Для доказательства данной теоремы воспользуемся теорией топологической степени для многозначных векторных полей (см., например, [13]).

В силу априорной оценки (2.6.4) все решения семейства операторных включений (2.6.13) лежат в шаре $B_R \subset \overline{E_1}$ радиуса $R = C_{22} + 1$ с центром в нуле. Следовательно, $v \notin \xi\mathcal{M}(v)$ для всех $(v,\xi) \in \partial B_R \times [0,1]$. Используя свойство гомотопической инвариантности степени и свойство нормировки степени, получим, что

$$deg(I - \mathcal{M}, \bar{B}_R, 0) = deg(I, \bar{B}_R, 0) = 1.$$

Так как эта степень отлична от нуля, то существует хотя бы одно решение $v \in \overline{E_1}$ операторного включения (2.6.13). □

Поскольку существует решение $v \in \overline{E_1}$ включения (2.6.13), то из вышеприведенных рассуждений следует, то аппроксимационная задача имеет хотя бы одно решение $v \in \overline{E_1}$.

Перейдем непосредственно к доказательству разрешимости задачи (2.6.4)–(2.6.6). Для этого осуществим предельный переход во вспомогательной задаче (2.6.8)–(2.6.10) при $\xi = 1$. Поскольку пространство V^3 плотно в V^0, то для каждого $v_0^* \in V^0$ существует последовательность $v_0^m \in V^3$, сходящаяся к v_0^* в V^0. Если $v_0^* \equiv 0$, то положим $v_0^m \equiv 0$, $\varepsilon_m = 1/m$. Если же $\|v_0^*\|_{V^0} \neq 0$, то начиная с некоторого номера $\|v_0^m\|_{V^2} \neq 0$. Тогда положим $\varepsilon_m = 1/(m\|v_0^m\|_{V^2}^2)$. В силу нашего выбора полученная последовательность $\{\varepsilon_m\}$ сходится к нулю при $m \to \infty$. Причем $\varepsilon_m \|v_0^m\|_{V^2}^2 \leqslant 1$.

По теореме 2.6.4 при каждом ε_m и v_0^m существует решение $(v_m, f_m) \in \overline{E_1} \times L_2(0, T, V^{-1}) \subset E_1 \times L_2(0, T, V^{-1})$ вспомогательной задачи (2.6.8)–(2.6.10) при $\xi = 1$. Таким образом, каждое решение v_m для всех $\varphi \in V^1$ при почти всех $t \in (0, T)$ удовлетворяет равенству

$$\langle v_m', \varphi\rangle - \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n (\Delta_\alpha^{-1} v_m)_i (v_m)_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\,dx + 2\int\limits_\Omega \nu(\theta)\mathcal{E}(v_m) : \mathcal{E}(\varphi)\,dx -$$
$$-\varepsilon_m \int\limits_\Omega \nabla \Delta v_m' : \nabla\varphi\,dx = \langle f_m, \varphi\rangle, \qquad (2.6.22)$$

условию обратной связи (2.6.1) и начальному условию

$$v_m|_{t=0} = v_0^m.$$

Так как последовательность $\{v_0^m\}$ сходится в V^0, то она ограничена по норме V^0. Следовательно,

$$\|v_0^m\|_{V^0}^2 + \varepsilon_m \|v_0^m\|_{V^2}^2 \leqslant C_{23}.$$

Таким образом, из оценок (2.6.14), (2.6.15), (2.6.19) и (2.6.20) получаем, что

$$\|v_m\|^2_{L_2(0,T;V^1)} \leqslant C_{24}(\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} + 1), \qquad (2.6.23)$$
$$\|v_m\|^2_{C([0,T];V^0)} \leqslant C_{25}(\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} + 1), \qquad (2.6.24)$$
$$\|v_m'\|_{L_2(0,T;V^{-1})} \leqslant C_{26}(\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} + 1), \qquad (2.6.25)$$
$$\varepsilon\|v_m'\|_{L_2(0,T;V^3)} \leqslant C_{27}(\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} + 1), \qquad (2.6.26)$$

где константы $C_{24} - C_{27}$ не зависят от ε. В силу непрерывности вложения

$C([0,T];V^0) \subset L_\infty(0,T;V^0)$ и оценок (2.5.40)–(2.5.42), без ограничения общности (если необходимо переходя к подпоследовательности) получим, что

$$v_m \to v_* \quad \text{слабо в} \quad L_2(0,T;V^1) \quad \text{при} \quad m \to \infty,$$
$$v_m \to v_* \quad {}^*\text{-слабо в} \quad L_\infty(0,T;V^0) \quad \text{при} \quad m \to \infty,$$
$$v_m' \to v_*' \quad \text{слабо в} \quad L_2(0,T;V^{-1}) \quad \text{при} \quad m \to \infty,$$

и что предельная функция v_* принадлежит пространству E_1.

Принимая во внимание априорные оценки (2.6.23)–(2.6.26) и условия $(\Psi1) - (\Psi4)$, мы без ограничения общности можем предположить, что существует $f_* \in L_2(0,T;V^{-1})$ такое, что $f_m \to f_* \in \Psi(v_*)$ при $m \to \infty$.

Перейдем к пределу в каждом слагаемом (2.5.39).

При $m \to \infty$ по определению слабой сходимости $v_m \to v^*$ в $L_2(0,T;V^1)$ получим

$$\int\limits_\Omega \nu(\theta)\mathcal{E}(v_m) : \mathcal{E}(\varphi)\,dx \to \int\limits_\Omega \nu(\theta)\mathcal{E}(v_*) : \mathcal{E}(\varphi)\,dx$$

для любого $\varphi \in V^1$.

В силу слабой сходимости $v_m' \to v_*'$ в $L_2(0,T;V^{-1})$ при $m \to \infty$ получим, что

$$\langle v_m', \varphi\rangle \to \langle v_*', \varphi\rangle$$

для любого $\varphi \in V^1$.

Далее, используя оценку (2.5.43), без ограничения общности и в случае необходимости переходя к подпоследовательности, мы имеем, что существует функция $u \in L_2(0,T;V^3)$ такая, что

$$\varepsilon_m v_m' \to u \quad \text{слабо в} \quad L_2(0,T;V^3) \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Тогда

$$\varepsilon_m \langle \nabla\Delta v_m', \nabla\varphi\rangle \to \langle \nabla\Delta u, \nabla\varphi\rangle, \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Однако последовательность $\varepsilon_m v_m'$ сходится к нулю в смысле распределений на отрезке $[0,T]$ со значениями в V^{-3}. Действительно для любой гладкой скалярной функции ψ с компактным носителем и $\varphi \in V^3$, мы получим

$$\lim_{m\to\infty} \left|\varepsilon_m \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \nabla\Delta v_m' : \nabla\varphi\,dx\psi(t)\,dt\right| = \lim_{m\to\infty} \varepsilon_m \left|\int\limits_0^T \int\limits_\Omega \Delta v_m'\Delta\varphi\,dx\psi(t)\,dt\right| =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \varepsilon_m \left| \int_0^T \int_\Omega \nabla v_m' : \nabla\Delta\varphi \, dx \psi(t)\, dt \right| =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \varepsilon_m \lim_{m\to\infty} \left| \int_0^T \int_\Omega \nabla v_m' : \nabla\Delta\varphi \, dx \psi(t)\, dt \right| =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \varepsilon_m \lim_{m\to\infty} \left| \int_\Omega \left(\int_0^T \nabla v_m' \psi(t)\, dt \right) : \nabla\Delta\varphi \, dx \right| =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \varepsilon_m \lim_{m\to\infty} \left| \int_\Omega \left(\int_0^T \nabla v_m \frac{\partial\psi(t)}{\partial t}\, dt \right) : \nabla\Delta\varphi \, dx \right| =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \varepsilon_m \lim_{m\to\infty} \left| \int_0^T \int_\Omega \nabla v_m : \nabla\Delta\varphi \, dx \frac{\partial\psi(t)}{\partial t}\, dt \right|.$$

Так как v_m слабо сходится к v^* в $L_2(0,T;V^1)$ и, следовательно, сходится к v^* в смысле распределений, то

$$\lim_{m\to\infty} \varepsilon_m \lim_{m\to\infty} \left| \int_0^T \int_\Omega \nabla v_m : \nabla\Delta\varphi \, dx \psi(t)\, dt \right| =$$

$$= \left| \int_0^T \int_\Omega \nabla v_* : \nabla\Delta\varphi \, dx \frac{\partial\psi(t)}{\partial t}\, dt \right| \lim_{m\to\infty} \varepsilon_m = 0.$$

Таким образом, в силу единственности слабого предела

$$\varepsilon_m \langle \nabla\Delta v_m', \nabla\varphi \rangle \to 0 \quad \text{при} \quad m\to\infty.$$

Так как вложение $V^1 \subset L_4(\Omega)$ является вполне непрерывным, а вложение $L_4(\Omega) \subset V^{-1}$ — непрерывно, то по теореме 1.1.5 следует, что

$$F = \{v \in L_2(0,T;V^1), v' \in L_2(0,T;V^{-1})\} \subset L_2(0,T;L_4(\Omega)).$$

Тогда, учитывая оценки (2.5.41) и (2.5.42) заключаем, что

$$v_m \to v_* \quad \text{сильно в} \quad L_2(0,T;L_4(\Omega)).$$

В силу того, что оператор $\Delta_\alpha^{-1} = (I - \alpha^2\Delta)^{-1} : L_2(0,T;V^1) \to L_2(0,T;V^3)$

является непрерывным, то

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} (\Delta_\alpha^{-1} v_m)_i (v_m)_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx \to \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} (\Delta_\alpha^{-1} v_*)_i (v_*)_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx \quad \text{при} \quad m \to \infty,$$

где первая последовательность $(\Delta_\alpha^{-1} v_m)_i$ слабо сходится в $L_2(0,T;V^1)$, а вторая $(v_m)_j$ — сильно в $L_2(0,T;L_4(\Omega))$. Следовательно, их произведение сходится слабо к произведению пределов.

В итоге показали, что функции (v_*, f_*) удовлетворяет равенству:

$$\langle v_*', \varphi\rangle - \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} (\Delta_\alpha^{-1} v_*)_i (v_*)_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx + 2\int\limits_{\Omega} \nu(\theta)\mathcal{E}(v_*) : \mathcal{E}(\varphi)\, dx = \langle f_*, \varphi\rangle. \tag{2.6.27}$$

Так как для последовательности $\{v_m\}$ имеют место априорные оценки (2.6.23), (2.6.24) и (2.6.25), то в силу свойств слабой сходимости для v_* непосредственно получаем оценку:

$$\|v_*\|_{L_2(0,T;V^1)} + \|v_*\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \|v_*'\|_{L_2(0,T;V^{-1})} \leqslant C_{28}.$$

Откуда следует, что $v_* \in E_1$. Таким образом, теорема 2.6.3 доказана.

2.6.3 Доказательство разрешимости задачи (2.5.5)–(2.5.6), (2.6.1)

Рассмотрим следующую начально–краевую задачу при фиксированных $\hat\theta \in E_2$ и $v \in E_1$:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} - \chi \triangle \theta = \big(\nu(\hat\theta)\mathcal{E}(v)\big) : \mathcal{E}(v) + g; \tag{2.6.28}$$

$$g \in G(\theta); \quad \theta|_{t=0} = \theta_0, \quad \theta|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0. \tag{2.6.29}$$

Слабое решение задачи (2.6.28)–(2.6.29) определим как $(\theta, g) \in E_2 \times L_1(0,T;H_p^{-2(1-1/p)}(\Omega))$, удовлетворяющую условию обратной связи (2.6.1), тождеству (2.6.3) и начальному условию $\theta|_{t=0} = \theta_0$.

Для задачи (2.6.28)–(2.6.29) справедлива следующая теорема.

Теорема 2.6.5. *Пусть*$\theta_0 \in W_p^{1-2/p}(\Omega)$, $\hat\theta \in E_2$, $v \in E_1$. *Тогда при* $1 < p < 4/3$ *для* $n = 2$ *и при* $1 < p < 10/9$ *для* $n = 3$ *задача* (2.6.28)–(2.6.29) *имеет по крайней мере одно слабое решение и справедлива оценка*

$$\|\theta\|_{E_2} \leq R_2(\|\partial v/\partial t\|^2_{L_2(0,T;H)} + \|\theta_0\|_{W_p^{1-2/p}(\Omega)}). \tag{2.6.30}$$

Доказательство данной теоремы приведено в работе [151].

2.6.4 Построение последовательных приближений

Рассмотрим последовательность $(v^n, \theta^n, f^n, g^n), n = 0, 1, 2, \dots$, определяемую следующим образом. Пусть v^0 и θ^0 означают начальные значения v_0 и θ_0 для v и θ из (2.6.6) и (2.6.29), соответственно. Пусть $(v^n, \theta^n, f^n, g^n)$ известны. Тогда вначале находятся (v^{n+1}, f^{n+1}) как слабое решение задачи

$$\frac{\partial v^{n+1}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} u_i^{n+1} \frac{\partial v^{n+1}}{\partial x_i} - 2\mathrm{Div}\,(\nu(\theta^n)\mathcal{E}(v^{n+1})) + \mathrm{grad}\, p = f^{n+1}; \tag{2.6.31}$$

$$f^{n+1} \in F(v^{n+1}); \quad \mathrm{div}\, v^{n+1} = 0; \quad v^{n+1} = u^{n+1} - \alpha^2 \Delta u^{n+1}; \tag{2.6.32}$$

$$v^{n+1}|_{t=0} = v_0; \quad v^{n+1}|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0, \tag{2.6.33}$$

затем, при найденных (v^{n+1}, f^{n+1}) находятся (θ^{n+1}, g^{n+1}) как слабое решение задачи

$$\frac{\partial \theta^{n+1}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i^{n+1} \frac{\partial \theta^{n+1}}{\partial x_i} - \chi \triangle\, \theta^{n+1} = 2\nu(\theta^n)\mathcal{E}(v^{n+1}) : \mathcal{E}(v^{n+1}) + g^{n+1}; \tag{2.6.34}$$

$$g^{n+1} \in G(\theta^{n+1}); \quad \theta^{n+1}|_{t=0} = \theta_0; \quad \theta^{n+1}|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0. \tag{2.6.35}$$

Отметим, что слабым решением задачи (2.6.31)–(2.6.33) называется пара функций $(v^{n+1}, f^{n+1}) \in E_1 \times L_2(0,T;V^{-1})$, удовлетворяющая условию обратной связи (2.6.1), соотношению (2.6.2) и начальному условию $v^{n+1}|_{t=0} = v_0$, а слабым решением задачи (2.6.34)–(2.6.35) называется пара функций $(\theta^{n+1}, g^{n+1}) \in E_2 \times L_1(0,T;H_p^{-2(1-1/p)}(\Omega))$, удовлетворяющая условию обратной связи (2.6.1), соотношению (2.6.3) и начальному условию $\theta^{n+1}|_{t=0} = \theta_0$.

Разрешимость задачи (2.6.31)–(2.6.33) следует из теоремы 2.6.3. При найденных функциях v^{n+1} и f^{n+1} выполнены все требования теоремы 2.6.5. Отсюда следует, что задача (2.6.34)–(2.6.35) также разрешима.

2.6.5 Предельный переход

Рассмотрим теперь последовательность $(v^n, \theta^n, f^n, g^n)$, $n = 1, 2, \dots$, где (v^n, f^n) — решение задачи (2.6.31)–(2.6.33), а (θ^n, g^n) — решение задачи (2.6.34)–(2.6.35). Изучим вопрос о сходимости последовательности $(v^n, \theta^n, f^n, g^n)$. Рассмотрим последовательность $\{\theta^n\}$.

Лемма 2.6.5. *Последовательность* $\{\theta^n\}$ *относительно компактна в* $L_p(0,T;L_p(\Omega))$, *где* p *удовлетворяет условиям теоремы 2.6.5.*

Рассмотрим теперь v^n. В силу оценки (2.6.7) можно считать (без ограничения общности), что v^n слабо сходится в $L_2(0,T;V^1)$, а $\partial v^n/\partial t$ слабо сходится в $L_2(0,T;V^{-1})$. Покажем, что подпоследовательность v^n сходится к v, где v – это решение задачи (2.6.31)–(2.6.33) при $\theta \in E_2$ и $\theta = \lim \theta^n$.

Так как v^n решение задачи (2.6.31)–(2.6.33), следовательно справедливо следующее равенство:

$$\int\limits_0^T\int\limits_\Omega \frac{\partial v^n}{\partial t}\,\varphi\,dx\,dt - \int\limits_0^T\int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n u_i^n v_j^n \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\,dx\,dt+$$

$$+\,2\int\limits_0^T\int\limits_\Omega \nu(\theta^n)\mathcal{E}(v^n):\mathcal{E}(\varphi)\,dx\,dt = \langle f^n,\varphi\rangle. \quad (2.6.36)$$

Принимая во внимание априорные оценки (2.6.23)–(2.6.26) и условия $(\Psi1)-(\Psi4)$, мы без ограничения общности можем предположить, что существует $f_* \in L_2(0,T;V^{-1})$ такое, что $f_m \to f_* \in \Psi(v_*)$ при $m \to \infty$. В силу теоремы Симона 1.1.5 (при необходимости переходя к подпоследовательностям) $v^n \to v$ сильно в $C([0,T],L_4(\Omega))$. Таким образом, v^n сходится к v сильно в $C([0,T],L_4(\Omega)^n)$, а u^n сходится к u слабо в $C([0,T];V^{-1})$. Тогда произведение этих последовательностей сходится слабо к произведению пределов. Следовательно, в равенстве (2.6.36) в каждом слагаемом можно перейти к пределу. Продифференцировав полученное равенство по $t \in [0,T]$, получим, что предельная функция $v \in E_1$ будет удовлетворять равенству (2.6.2), и, следовательно, будет являться слабым решением задачи (2.6.31)–(2.6.33).

Для того, чтобы обосновать предельный переход в задаче (2.6.34)–(2.6.35), нам понадобится более сильный результат о сходимости v^n. Имеет место

Лемма 2.6.6. *Последовательность* v^n *сильно сходится в* $L_2(0,T;V^1)$ *к* $v \in E_1$.

Доказательство этого факта производится аналогично доказательству теоремы 2.1.7.

Покажем, что полученное при предельном переходе $\theta \in E_2$, является слабым решением задачи (2.6.28)–(2.6.29). Так как θ^n является решением задачи

(2.6.34)–(2.6.35) для него справедливо равенство (2.6.3). Рассмотрим бесконечно дифференцируемую по t и x на Q_T функцию $\psi(t,x)$, удовлетворяющую условиям $\psi(0,\cdot)=\psi(T,\cdot)=0$ и $\psi|_{[0,T]\times\partial\Omega}=0$. Умножим (2.6.3) на $\psi(t,x)$, проинтегрируем на [0,T] и упростим:

$$-\int_0^T(\theta^n,\phi)\frac{\partial\psi}{\partial t}\,dt-\int_0^T\sum_{i=1}^n(u_i^n\theta^n,\frac{\partial\phi}{\partial x_i})\psi\,dt+\chi\int_0^T\sum_{i=1}^n(\frac{\partial\theta^n}{\partial x_i},\frac{\partial\phi}{\partial x_i})\,\psi\,dt=$$

$$=\int_0^T\langle g^n,\phi\rangle\psi\,dt+2\int_0^T\nu(\theta^{n-1})\mathcal{E}(v^n):\mathcal{E}(v^n),\phi)\psi\,dt,\quad \phi\in C_0^\infty(\Omega).$$

Из сильной сходимости v^n в $L_2(0,T;V^1)$ и θ^n в $L_p(0,T;\,L_p(\Omega))$ и слабой сходимости u^n к u^v в $C([0,T];V^{-1})$ и θ^n к θ в $L_p(0,T;W_p^1(\Omega))$, где p удовлетворяет условиям теоремы 2.6.5, вытекает возможность предельного перехода во всех слагаемых. Из последнего равенства в силу произвольности ψ вытекает справедливость соотношения (2.6.3). Это и завершает доказательство теоремы 2.6.1.

2.6.6 Доказательство теоремы 2.6.2

Из теоремы 2.6.1 мы получаем, что множество решений Σ не пусто. Следовательно, существует минимизирующая последовательность $(v_l,\theta_l,f_l,g_l)\in\Sigma$ такая, что

$$\lim_{l\to\infty}\Phi(v_l,\theta_l,f_l,g_l)=\inf_{(v,\theta,f,g)\in\Sigma}\Phi(v,f).$$

Как и ранее, используя оценки (2.6.23)–(2.6.26), мы без ограничения общности и в случае необходимости переходя к подпоследовательности, можем предположить, что $v_l\to v_*$ сильно в $C([0,T],L_4(\Omega)^n)$, а u^n сходится к u слабо в $C([0,T];V^{-1})$.; $v_l\rightharpoonup v_*$ слабо в $L_2(0,T;V^1)$; $f_l\to f_*\in F(v_*)$ сильно в $L_2(0,T;V^{-1})$; $\theta_l\to\theta_*$ сильно в $L_p(0,T;L_p(\Omega))$; $\theta_l\rightharpoonup\theta_*$ слабо в $L_p(0,T;W_p^1(\Omega))$; $g_l\to g_*\in G(\theta_*)$ сильно в $L_1(0,T;W_p^{-1}(\Omega))$ при $m\to+\infty$.

Откуда, также как и в предыдущих доказательствах получим $Av_l\rightharpoonup Av_*$ слабо в $L_2(0,T;V^{-1})$; $(J+\varkappa A)v_l'\rightharpoonup(J+\varkappa A)v_*'$ слабо в $L_2(0,T;V^{-1})$; $B(v_l)\to B(v_*)$ слабо в $L_2(0,T;V^{-1})$; $D(v_l)\rightharpoonup D(v_*)$ слабо в $L_2(0,T;V^{-1})$ при $m\to+\infty$.

Переходя к пределу в соотношении

$$Jv_l' + 2\nu D(v_l) - B(v_l) = f_l \in F(v_l),$$

мы получим, что $(v^*, f^*) \in \Sigma$.

Аналогично переходя к пределу во второй задаче

$$\frac{d(\theta_l, \phi)}{dt} - (\sum_{i=1}^{n} (v_l)_i \theta_l, \frac{\partial \phi}{\partial x_i}) + \chi(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \theta_l}{\partial x_i}, \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \phi}{\partial x_i}) -$$
$$-2(\nu(\theta_l)\mathcal{E}(v_l) : \mathcal{E}(v_l), \phi) = \langle g_l, \phi \rangle \in G(\theta_l)$$

мы получим, что $(\theta^*, g^*) \in \Sigma$.

Поскольку функционал Φ полунепрерывен снизу относительно слабой топологии, мы имеем

$$\Phi(v^*, \theta^*, f^*, g^*) \leq \inf_{(v,\theta,f,g)\in\Sigma} \Phi(v, \theta, f, g),$$

что доказывает, что $(v^*, \theta^*, f^*, g^*)$ — требуемое решение. Это и завершает доказательство теоремы 2.6.2.

ГЛАВА 3
АТТРАКТОРЫ ВЯЗКОУПРУГИХ СРЕД

Данная глава посвящена исследованию существования аттракторов для двух неавтономных систем уравнений неньютоновской гидродинамики. В первом параграфе изучается математическая модель, описывающая движение водных растворов полимеров. Для данной задачи доказывается существование минимального траекторного pullback–аттрактора и минимального pullback–аттрактора. Второй параграф посвящен математической модели нелинейно–вязкой среды. Для данной задачи доказывается существование равномерного траекторного аттрактора и равномерного глобального аттрактора.

3.1 Pullback–аттракторы для модели движения водных растворов полимеров

Пусть Ω — ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$ с гладкой границей $\partial\Omega$. Рассмотрим следующую начально-краевую задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial u}{\partial x_i} - \nu\,\Delta u - \varkappa \frac{\partial\,\Delta u}{\partial t} - 2\varkappa\,\mathrm{Div}\left(\sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial \mathcal{E}(u)}{\partial x_i}\right) -$$
$$-2\varkappa\,\mathrm{Div}\,(\mathcal{E}(u)W_\rho(u) - W_\rho(u)\mathcal{E}(u)) + \mathrm{grad}\,p =$$
$$= f,\ (x,t) \in \Omega \times (\tau, +\infty); \tag{3.1.1}$$

$$\mathrm{div}\,u = 0,\ (x,t) \in \Omega \times (\tau, +\infty); \tag{3.1.2}$$

$$u\big|_{\partial\Omega\times[\tau,+\infty)} = 0, \tag{3.1.3}$$

$$u\big|_{t=\tau} = a. \tag{3.1.4}$$

Для данной начально–краевой задачи рассмотрим вопрос существования pullback–аттракторов. Для этого сначала приведём основные определения и результаты абстрактной теории pullback–аттракторов пространств траекторий [147].

3.1.1 Основные определения и результаты абстрактной теории pullback–аттракторов

Пусть E и E_0 — банаховы пространства, кроме того предположим, что $E \subset E_0$ и E рефлексивно. Каждому $\tau \in \mathbb{R}$ поставим в соответствие непустое множество

$$\mathcal{H}_\tau^+ \subset \mathcal{T} := C(\mathbb{R}_+; E_0) \cap L_\infty^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; E).$$

Множества $\mathcal{H}_\tau^+$ называются *пространствами траекторий*, а их элементы — *траекториями*. Семейство $\mathbf{H}^+ = \{\mathcal{H}_\tau^+\}_{\tau\in\mathbb{R}}$ будем называть *семейством пространств траекторий.*

Зададим класс семейств множеств $\mathfrak{D}$ над E, причём будем считать, что для каждого семейства $\mathbf{D} = \{D_t\} \in \mathfrak{D}$ имеем $D_t \neq \varnothing$ при любом $t \in \mathbb{R}$. Для каждого $\mathbf{D} = \{D_\tau\} \in \mathfrak{D}$ рассмотрим семейство $\mathbf{H}^+(\mathbf{D}) = \{\mathcal{H}_\tau^+(\mathbf{D})\}$, где

$$\mathcal{H}_\tau^+(\mathbf{D}) = \{v \in \mathcal{H}_\tau^+ \colon v(0) \in D_\tau\}.$$

Обозначим через $\mathrm{T}(h)$ оператор сдвига, который действует на функции по правилу

$$(\mathrm{T}(h)g)(s) = g(s+h).$$

Определение 3.1.1. *Семейство* $\mathbf{P} = \{P_\theta\}$ $(P_\theta \subset \mathcal{T})$ *называется* $\mathfrak{D}$-pullback-притягивающим *для* $\mathcal{H}^+$*, если для любого семейства* $\mathbf{D} \in \mathfrak{D}$ *и для любого* $\theta \in \mathbb{R}$ *выполняется предельное соотношение*

$$\sup_{u\in\mathcal{H}_\tau^+(\mathbf{D})} \inf_{v\in P_\theta} \|\mathrm{T}(\theta-\tau)u - v\|_{C(\mathbb{R}_+;E_0)} \to 0 \quad (\tau \to -\infty).$$

Определение 3.1.2. *Семейство* $\mathbf{P} = \{P_\theta\}$ $(P_\theta \subset \mathcal{T})$ *называется* $\mathfrak{D}$-pullback-поглощающим *для* $\mathbf{H}^+$*, если для любого семейства* $\mathbf{D} \in \mathfrak{D}$ *и для любого* $\theta \in \mathbb{R}$ *существует число* $\tau_{\mathbf{D}}(\theta) \leqslant \theta$*, такое, что для всех* $\tau \leqslant \tau_{\mathbf{D}}(\theta)$

$$\mathrm{T}(\theta-\tau)\mathcal{H}_\tau^+(\mathbf{D}) \subset P_\theta,$$

и функция $\tau_{\mathbf{D}} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *не убывает.*

Определение 3.1.3. *Семейство* $\mathbf{P} = \{P_\theta\}$ $(P_\theta \subset \mathcal{T})$ *называется* $\mathcal{T}$-относительно-компактным, *если*

(i) P_θ *относительно компактно в* $C(\mathbb{R}_+; E_0)$ *при каждом* $\theta \in \mathbb{R}$*;*

(ii) для каждого $\theta \in \mathbb{R}$ существует непрерывная функция $\varphi_\theta \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, такая, что для каждой траектории $v \in P_\theta$ при всех $t \in \mathbb{R}_+$ выполняется неравенство $\|v(t)\|_E \leqslant \varphi_\theta(t)$.

Такое семейство называется $\mathcal{T}$-компактным, *если множество P_θ замкнуто (и, таким образом, компактно) в $C(\mathbb{R}_+; E_0)$ при каждом $\theta \in \mathbb{R}$.*

Для семейства $\mathbf{P} = \{P_\tau\}$ ($P_\tau \subset \mathcal{T}$) и для $h \in \mathbb{R}$ обозначим $\mathrm{T}(h)\mathbf{P}$ семейство множеств

$$(\mathrm{T}(h)P)_\tau = \mathrm{T}(h)P_{\tau-h} \quad (\tau \in \mathbb{R}).$$

Также будем считать, что включение семейств $\mathbf{P} \subset \mathbf{P}'$, где $\mathbf{P} = \{P_\tau\}$, $\mathbf{P}' = \{P'_\tau\}$ ($P_\tau, P'_\tau \subset \mathcal{T}$) по определению означает, что $P_\tau \subset P'_\tau$ при всех $\tau \in \mathbb{R}$.

Определение 3.1.4. *Семейство $\mathbf{P}$, состоящее из непустых множеств в $\mathcal{T}$, называется* траекторным $\mathfrak{D}$-pullback-полуаттрактором *для $\mathbf{H}^+$, если*

(i) $\mathbf{P}$ является $\mathcal{T}$-компактным;

(ii) $\mathrm{T}(h)\mathbf{P} \subset \mathbf{P}$ для всех $h \geqslant 0$;

(iii) $\mathbf{P}$ является $\mathfrak{D}$-pullback-притягивающим.

Определение 3.1.5. *Траекторный $\mathfrak{D}$-pullback-полуаттрактор $\mathbf{P}$ для $\mathbf{H}^+$ называется* траекторным $\mathfrak{D}$-pullback-аттрактором *для $\mathbf{H}^+$, если $\mathrm{T}(h)\mathbf{P} = \mathbf{P}$ для всех $h \geqslant 0$.*

Определение 3.1.6. *Траекторный $\mathfrak{D}$-pullback-аттрактор $\mathbf{U} = \{\mathcal{U}_\theta\}$ ($\mathcal{U}_\theta \subset \mathcal{T}$) для $\mathbf{H}^+$ называется* минимальным, *если он содержится в любом траекторном $\mathcal{D}$-pullback-аттракторе $\mathbf{P} = \{P_\theta\}$.*

Определение 3.1.7. *Семейство $\mathbf{A} = \{\mathcal{A}_\theta\} \subset E$ называется* минимальным $\mathfrak{D}$-pullback-аттрактором *для $\mathbf{H}^+$, если*

(i) $\mathcal{A}_\theta$ компактно в E_0 и ограниченно в E при всех $\theta \in \mathbb{R}$;

(ii) для всех $\mathbf{D} \in \mathfrak{D}$ и $\theta \in \mathbb{R}$ выполняется условие pullback-притягивания

$$\sup_{v \in \mathcal{H}^+_\tau(\mathbf{D})} \inf_{a \in \mathcal{A}_\theta} \|v(\theta - \tau) - a\|_{E_0} \to 0 \quad (\tau \to -\infty);$$

(iii) $\mathbf{A}$ содержится в любом семействе $\mathbf{A}' = \{\mathcal{A}'_\theta\}$ ($\mathcal{A}'_\theta \subset E$), удовлетворяющем условиям (i) и (ii).

Теорема 3.1.1. *Пусть для $\mathbf{H}^+$ существует относительно $\mathcal{T}$-компактное $\mathfrak{D}$-pullback-поглощающее семейство $\mathbf{P}$, и пусть $\overline{\mathbf{P}}$ — замыкание $\mathbf{P}$ в топологии $C(\mathbb{R}_+; E_0)$. Тогда существует минимальный траекторный $\mathfrak{D}$-pullback-аттрактор $\mathbf{U} \subset \overline{\mathbf{P}}$.*

Теорема 3.1.2. *Пусть существует траекторный $\mathfrak{D}$-pullback-полуаттрактор* $\mathbf{P}$ *для* $\mathbf{H}^+$*. Тогда существует минимальный траекторный $\mathfrak{D}$-pullback-аттрактор $\mathcal{U} \subset P$.*

Теорема 3.1.3. *Пусть* $\mathbf{U} = \{\mathcal{U}_\theta\}$ *— минимальный траекторный $\mathfrak{D}$-pullback-аттрактор для* $\mathbf{H}^+$*. Тогда семейство* $\mathbf{A} = \{\mathcal{A}_\theta\}$*, где* $\mathcal{A}_\theta = \{u(0)\colon u \in \mathcal{U}_\theta\} \subset E$*, является минимальным $\mathfrak{D}$-pullback-аттрактором для* $\mathbf{H}^+$*.*

3.1.2 Формулировка основного результата

Перейдём теперь к pullback-аттракторам рассматриваемой гидродинамической модели.

Будем предполагать, что плотность внешних сил f в уравнении (3.1.1) принадлежит пространству $L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; V^0)$ и удовлетворяет условию

$$\int\limits_{-\infty}^{t} e^{\alpha\xi}\|f(\xi)\|^2_{V^{-3}}\, d\xi < \infty \tag{3.1.5}$$

для всех $t \in \mathbb{R}$ (здесь α определяется формулой $\alpha = \frac{\nu}{K_0^2+\varkappa}$, K_0 — положительная константа).

Зафиксируем число $\delta \in (0,1]$. В качестве банаховых пространств, необходимых для введения класса $\mathcal{T}$, возьмём $E = V^1$ и $E_0 = V^{1-\delta}$.

Теорема 3.1.4. *Пусть* $f \in L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, V^0)$ *удовлетворяет условию* (3.1.5)*. Тогда семейство пространств траекторий имеет минимальный траекторный $\mathfrak{D}$-pullback-аттрактор* $\mathbf{U}$ *и минимальный $\mathfrak{D}$-pullback-аттрактор* $\mathbf{A} = \mathbf{U}(0)$*.*

3.1.3 Вспомогательная задача

В теории траекторных пространств обычно рассматривают траектории, определённые на полуоси $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$. В связи с этим наряду с задачей (3.1.1)— (3.1.4) рассмотрим вспомогательную задачу

$$\begin{gathered}\frac{\partial v}{\partial t} - \nu\,\Delta\, v + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \varkappa \frac{\partial\,\Delta\, v}{\partial t} - 2\varkappa\,\mathrm{Div}\left(\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial \mathcal{E}(v)}{\partial x_i}\right) - \\ -2\varkappa\,\mathrm{Div}\,(\mathcal{E}(v)W_\rho(v) - W_\rho(v)\mathcal{E}(v)) + \mathrm{grad}\, p = \\ = F,\ (x,t) \in \Omega \times (0,+\infty);\end{gathered} \tag{3.1.6}$$

$$\operatorname{div} v = 0,\ (x,t) \in \Omega \times (0,+\infty); \tag{3.1.7}$$

$$v\Big|_{\partial\Omega\times[0,+\infty)} = 0, \tag{3.1.8}$$

$$v\Big|_{t=0} = a. \tag{3.1.9}$$

Здесь значение правой части F заранее не уточняется. Если $F(x,t) = f(x,t+\tau)$, то задача (3.1.6)—(3.1.9) получается из задачи (3.1.1)—(3.1.4) линейной заменой независимого переменного t, переводящей τ в 0.

Имеет место теорема существования слабых решений (см. [157]).

Теорема 3.1.5. *При любых $F \in L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; V^0)$ и $a \in V^1$ задача* (3.1.6)—(3.1.9) *имеет слабое решение на полуоси $\mathbb{R}_+$, удовлетворяющее неравенству*

$$\|v(t)\|_{V^1}^2 \leqslant e^{-\alpha t}\left(\left(\frac{K_0^2}{\varkappa}+1\right)\|a\|_{V^1}^2 + \frac{1}{\nu\varkappa}\int\limits_0^t e^{\alpha\xi}\|F(\xi)\|_{V^{-1}}^2\,d\xi\right) \tag{3.1.10}$$

при почти всех $t > 0$. Более того, для всякого слабого решения v на $\mathbb{R}_+$ задачи (3.1.6)—(3.1.9) *с функцией $F \in L_2(0,T;V^0)$ имеем $v' \in L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;V^{-1})$, причём имеет место неравенство*

$$\|v'(t)\|_{V^{-1}} \leqslant C(\|F(t)\|_{V-3} + \|v(t)\|_{V^1} + \|v(t)\|_{V^1}^2) \tag{3.1.11}$$

при почти всех $t > 0$ с постоянной C, не зависящей от t, v и f.

Зафиксируем число $\delta \in (0,1]$. В качестве банаховых пространств, необходимых для введения класса $\mathcal{T}$, возьмём $E = V^1$ и $E_0 = V^{1-\delta}$.

Пусть $\tau \in \mathbb{R}$. В качестве пространства траекторий $\mathcal{H}_\tau^+$ задачи (3.1.1)—(3.1.4) рассматривается множество слабых решений v задачи (3.1.6)—(3.1.9) с правой частью $F = \mathrm{T}(\tau)f$ и некоторым начальным условием $a \in V^1$ (своим для каждого v), удовлетворяющих оценке

$$\|v(t)\|_{V^1}^2 \leqslant e^{-\alpha t}\left(\left(\frac{K_0^2}{\varkappa}+1\right)\|v(0)\|_{V^1}^2 + \frac{1}{\nu\varkappa}\int\limits_0^t e^{\alpha\xi}\|f(\xi+\tau)\|_{V^{-3}}^2\,d\xi\right). \tag{3.1.12}$$

Эти пространства траекторий образуют семейство пространств траекторий $\mathbf{H}^+ = \{\mathcal{H}_\tau^+\}$.

Заметим, что для пространств $\mathcal{H}_\tau^+$ имеет место включение $\mathcal{H}_\tau^+ \subset \mathcal{T}$. В самом деле, из неравенства (3.1.12) и условия (3.1.5) следует равномерная по

t оценка траектории $v \in \mathcal{H}_\tau^+$ на произвольном отрезке $[0, T]$:

$$\|v(t)\|_{V^1}^2 \leqslant \left(\frac{K_0^2}{\varkappa} + 1\right) \|v(0)\|_{V^1}^2 + \frac{1}{\nu\varkappa} e^{-\alpha\tau} \int\limits_{-\infty}^{T+\tau} e^{\alpha s} \|f(s)\|_{V^{-3}}^2 \, ds < \infty,$$

откуда $v \in L_\infty(0, T; V^1)$. В силу произвольности T получаем $v \in L_\infty^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; V^1)$. Кроме того, по теореме 3.1.5 имеем $v' \in L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; V^{-1})$. Воспользуемся теоремой

Теорема 3.1.6. *Если $p_0 < \infty$, то имеет место компактное вложение*

$$W(0, T; p_0, p_1; X_0, X_1) \subset L_{p_0}(0, T; F);$$

если $p_0 = \infty$, $p_1 > 1$, то имеет место компактное вложение

$$W(0, T; p_0, p_1; X_0, X_1) \subset C([0, T]; F).$$

Доказательство можно найти, например, в [60].

В нашем случае применим данную теорему к тройке пространств $V^1 \subset V^{1-\delta} \subset V^{-1}$, получим $v \in C(\mathbb{R}_+; V^{1-\delta})$. Включение $\mathcal{H}_\tau^+ \subset \mathcal{T}$ доказано.

Теорема 3.1.7. *Для каждого $a \in V^1$ существует траектория $v \in \mathcal{H}_\tau^+$ ($\tau \in \mathbb{R}$), удовлетворяющая начальному условию $v(0) = a$.*

Доказательство. Теорема является непосредственным следствием теоремы 3.1.5 о существовании слабых решений. □

Опишем класс $\mathfrak{D}$ притягивающихся семейств множеств. Пусть $\mathcal{R}$ обозначает множество таких функций $r \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, что функция $\tau \mapsto e^{\alpha\tau}(r(\tau))^2$ возрастает и

$$\lim_{\tau \to -\infty} e^{\alpha\tau}(r(\tau))^2 = 0.$$

Класс $\mathfrak{D}$ состоит из семейств $\mathbf{D} = \{D_\tau\}$ ($D_\tau \subset V^1$), для которых существуют функции $r_{\mathbf{D}} \in \mathcal{R}$, такие, что $w \in D_\tau$ и $\|w\|_{V^1} \leqslant r_{\mathbf{D}}(\tau)$ для всех $\tau \in \mathbb{R}$.

3.1.4 Доказательство теоремы 3.1.4

Мы построим семейство множеств $\mathbf{P} = \{P_\theta\}$ ($P_\theta \subset \mathcal{T}$), которое является $\mathcal{T}$-относительно компактным и pullback-поглощающим. Тогда утверждение теоремы будет следовать из теорем 3.1.1 и 3.1.3.

Пусть множество P_θ состоит из функций $v \in \mathcal{T}$, которые удовлетворяют неравенствам

$$\|v(t)\|^2_{V^1} \leqslant e^{-\alpha t}\left(\frac{K_0^2}{\varkappa} + 1 + \frac{1}{\nu\varkappa}\int\limits_{-\infty}^{t} e^{\alpha s}\|f(s+\theta)\|^2_{V^{-3}}\,ds\right), \tag{3.1.13}$$

$$\|v'(t)\|_{V^{-1}} \leqslant C(\|f(t+\theta)\|_{V^{-3}} + \|v(t)\|_{V^1} + \|v(t)\|^2_{V^1}) \tag{3.1.14}$$

(здесь C — постоянная из неравенства (3.1.11)).

Покажем, что построенное семейство $\mathbf{P} = \{P_\theta\}$ является $\mathcal{T}$-относительно компактным.

Условие (ii) определения 3.1.3 выполняется с функцией

$$\varphi_\theta(t) = e^{-\alpha t/2}\left(\frac{K_0^2}{\varkappa} + 1 + \frac{1}{\nu\varkappa}\int\limits_{-\infty}^{t} e^{\alpha s}\|f(s+\theta)\|^2_{V^{-3}}\,ds\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Конечность функции φ_θ следует из условия (3.1.5), так как

$$\int\limits_{-\infty}^{t} e^{\alpha s}\|f(s+\theta)\|^2_{V^{-3}}\,ds = e^{-\alpha\theta}\int\limits_{-\infty}^{t+\theta} e^{\alpha\xi}\|f(\xi)\|^2_{V^{-3}}\,d\xi < \infty.$$

Проверим выполнение условия (ii) определения 3.1.3. Пусть $[0,T]$ — произвольный отрезок. Положим $R_T = \max\limits_{t\in[0,T]} \varphi_\theta(t)$. Тогда для всякой траектории $v \in P_\theta$ имеем $\|v\|_{L_\infty(0,T;V^1)} \leqslant R_T$, а из неравенства (3.1.14) получаем

$$\|v'\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} \leqslant C(\|f\|_{L_2(\theta,T+\theta;V^{-3})} + \sqrt{T}R_T + \sqrt{T}R_T^2).$$

Таким образом, множество P ограничено в норме пространства $L_\infty(0,T;V^1)$, а множество $\{v' | v \in P\}$ ограничено в норме пространства $L_2(0,T;V^{-1})$. По теореме 3.1.6, применённой для случая пространств $V^1 \subset V^{1-\delta} \subset V^{-1}$, получаем, что множество P относительно компактно в $C([0,T];V^{1-\delta})$. В силу произвольности T получаем, что P_θ относительно компактно в $C(\mathbb{R}_+;V^{1-\delta})$, что и требовалось доказать.

Мы доказали, что семейство $\mathbf{P}$ $\mathcal{T}$-относительно компактно.

Проверим, что для $\mathbf{P}$ выполнены условия определения 3.1.2. Пусть $\mathbf{D} = \{D_\tau\} \in \mathfrak{D}$. Возьмём число θ и покажем, что существует такое $\tau_{\mathbf{D}}(\theta) \leqslant \theta$, что при $\tau \leqslant \tau_{\mathbf{D}}(\theta)$ выполняется включение

$$\mathrm{T}(\theta-\tau)\mathcal{H}_\tau^+(\mathbf{D}) \subset P_\theta, \tag{3.1.15}$$

и функция $\tau_{\mathbf{D}}$ возрастает.

По определению класса $\mathfrak{D}$ для семейства $\mathbf{D}$ существует функция $r_{\mathbf{D}}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, такая, что для $w \in D_\tau$ имеет места оценка $\|w\|_{V^1} \leqslant r_{\mathbf{D}}(\tau)$, и что функция $\chi_{\mathbf{D}}(\tau) = e^{\alpha\tau}(r_{\mathbf{D}}(\tau))^2$ возрастает и стремится к 0 при $\tau \to -\infty$. В силу монотонности функция $\chi_{\mathbf{D}}$ имеет возрастающую обратную функцию $\chi_{\mathbf{D}}^{-1}$.

Рассмотрим неравенство

$$\chi(\tau) \leqslant e^{\alpha\theta}. \tag{3.1.16}$$

В силу свойств функции $\chi_{\mathbf{D}}$ оно выполняется либо на всей оси, либо на луче $(-\infty, \chi^{-1}(e^{\alpha\theta})]$. В первом случае положим $\tau_{\mathbf{D}}(\theta) = \theta$, а во втором случае положим $\tau_{\mathbf{D}}(\theta) = \min\{\chi^{-1}(e^{\alpha\theta}), \theta\}$. Ясно, что в любом случае функция $\tau_{\mathbf{D}}$ возрастает, удовлетворяет неравенству $\tau_{\mathbf{D}}(\theta) \leqslant \theta$, и при $\tau \leqslant \tau_{\mathbf{D}}(\theta)$ выполняется неравенство (3.1.16) или, что то же,

$$e^{-\alpha(\theta-\tau)}(r_{\mathbf{D}}(\tau))^2 \leqslant 1 \quad (\tau \leqslant \tau_{\mathbf{D}}(\theta)). \tag{3.1.17}$$

Чтобы доказать включение (3.1.15) для $\tau \leqslant \tau_{\mathbf{D}}(\theta)$, возьмём траекторию $v \in \mathcal{H}_\tau^+$, такую, что $v(0) \in D_\tau$, и покажем, что $\mathrm{T}(\theta-\tau)v \in P_\theta$.

Покажем, что для функции $\mathrm{T}(\theta-\tau)v$ выполняется оценка (3.1.13). С помощью оценки (3.1.12) и неравенства (3.1.17) получаем:

$$\begin{aligned}
&\|\mathrm{T}(\theta-\tau)v(t)\|_{V^1}^2 = \|v(t+\theta-\tau)\|_{V^1}^2 \leqslant \\
&\quad\leqslant e^{-\alpha(t+\theta-\tau)}\left(\left(\frac{K_0^2}{\varkappa}+1\right)\|v(0)\|_{V^1}^2 + \frac{1}{\nu\varkappa}\int\limits_0^{t+\theta-\tau} e^{\alpha\xi}\|f(\xi+\tau)\|_{V^{-3}}^2\,d\xi\right) \leqslant \\
&\leqslant e^{-\alpha t}\left(\left(\frac{K_0^2}{\varkappa}+1\right)e^{-\alpha(\theta-\tau)}(r_{\mathbf{D}}(\tau))^2 + \frac{1}{\nu\varkappa}\int\limits_{-\infty}^{t+\theta-\tau} e^{\alpha(\xi+\tau-\theta)}\|f(\xi+\tau)\|_{V^{-3}}^2\,d\xi\right) \leqslant \\
&\qquad\qquad\leqslant e^{-\alpha t}\left(\frac{K_0^2}{\varkappa}+1+\frac{1}{\nu\varkappa}\int\limits_{-\infty}^{t} e^{\alpha s}\|f(s+\theta)\|_{V^{-3}}^2\,ds\right).
\end{aligned}$$

Оценка (3.1.13) для функции $\mathrm{T}(\theta-\tau)v$ доказана.

Покажем, что для функции $\mathrm{T}(\theta-\tau)v$ выполняется оценка (3.1.14). Так как v является слабым решением задачи (3.1.6)—(3.1.9) с функцией $F = \mathrm{T}(\tau)f$, по теореме 3.1.5 при почти всех $t > 0$ выполняется неравенство

$$\|v'(t)\|_{V^{-1}} \leqslant C(\|f(t+\tau)\|_{V^{-3}} + \|v(t)\|_{V^1} + \|v(t)\|^2_{V^1}).$$

Следовательно, имеем

$$\begin{aligned}\|T(\theta-\tau)v'(t)\|_{V^{-1}} = \|v'(t+\theta-\tau)\|_{V^{-1}} \leqslant \\ \leqslant C(\|f(t+\theta)\|_{V^{-3}} + \|v(t+\theta-\tau)\|_{V^1} + \|v(t+\theta-\tau)\|^2_{V^1}) = \\ = C(\|f(t+\theta)\|_{V^{-3}} + \|\mathrm{T}(\theta-\tau)v(t)\|_{V^1} + \|\mathrm{T}(\theta-\tau)v(t)\|^2_{V^1}).\end{aligned}$$

Таким образом, имеем $\mathrm{T}(\theta-\tau)v \in P_\theta$, и включение (3.1.15) доказано.

Мы установили, что семейство $\mathbf{P}$ является $\mathcal{T}$-относительно компактным и $\mathfrak{D}$-pullback-поглощающим, что достаточно для доказательства теоремы.

3.2 Равномерные аттракторы для нелинейно–вязкой среды

В данном параграфе рассматривается начально–краевая задача для модели движения нелинейно–вязкой среды. Пусть Ω ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$, $T > 0$ — заданное число. Движение нелинейно–вязкой несжимаемой жидкости в $Q_T := \Omega \times [0, T]$ описывается системой уравнений:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \mathrm{Div}\{2\nu(I_2(v))\mathcal{E}(v)\} + \mathrm{grad}\, p = f, \tag{3.2.1}$$

$$\mathrm{div}\, v = 0; \qquad v|_{t=0} = v_0(x); \tag{3.2.2}$$

$$v|_{\partial\Omega\times[0,T]} = 0. \tag{3.2.3}$$

Здесь тензор $I_2(v)$ определяется равенством

$$I_2^2(v) = \mathcal{E}(v) : \mathcal{E}(v) = \sum_{i,j=1}^{n} \mathcal{E}_{ij}^2(v).$$

Вязкость среды ν задается непрерывно дифференцируемой скалярной функцией, для которой, следуя [43], предполагаются следующие ограничения:

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad 0 < C_1 \le \nu(s) \le C_2 < \infty, \quad s \in [0, \infty);\\ &\text{b)} \quad |s\nu'(s)| \le C_3 < \infty, \quad s \in [0, \infty);\\ &\text{c)} \quad -s\nu'(s) \le \nu(s) \text{ при } \nu'(s) < 0. \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

Сначала приведём основные определения и результаты абстрактной теории равномерных аттракторов для неинвариантных траекторных пространств.

3.2.1 Основные факты теории равномерных аттракторов неавтономных систем

Рассмотрим два банаховых $E \subset E_0$ (вложение непрерывно), пространство E рефлексивно. Пространство $C(\mathbb{R}_+; E_0)$ состоит из непрерывных функций, определенных на $\mathbb{R}_+$ и принимающих значения в пространстве E_0.

Данное пространство – метрическое. Метрика задается формулой $\rho(u,v) = \|u-v\|_{C(\mathbb{R}_+;E_0)}$, где

$$\|u\|_{C(\mathbb{R}_+;E_0)} = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \frac{\|u\|_{C(0,k;E_0)}}{1+\|u\|_{C(0,k;E_0)}}.$$

Пространство $L_\infty(\mathbb{R}_+;E)$ состоит из функций u, определенных почти всюду на $\mathbb{R}_+$ и принимающих значения в E, для которых найдется число $\alpha(u)$ такое, что $\|u\|_E \le \alpha(u)$ при почти всех $t \in \mathbb{R}_+$. Норма в $L_\infty(\mathbb{R}_+;E)$ определяется равенством

$$\|u\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+;E)} = \underset{t\in\mathbb{R}_+}{\mathrm{vrai\,max}} \|u(t)\|_E.$$

Под траекторным пространством мы будем понимать любое непустое подмножество $C(\mathbb{R}_+;E_0) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+;E)$. Кроме того, рассмотрим некоторое множество $\mathcal{X}$ и предположим, что каждому σ из непустого подмножества $\Sigma \subset \mathcal{X}$ поставлено в соответствие траекторное пространство $\mathcal{H}_\sigma^+ \subset C(\mathbb{R}_+;E_0) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+;E)$. В этом случае говорят, что задано семейство траекторных пространств $\{\mathcal{H}_\sigma^+ : \sigma \in \Sigma\}$. Множество Σ называется пространством символов, а его элементы – символами. Множество $\mathcal{H}_\Sigma^+ = \bigcup\limits_{\sigma\in\Sigma} \mathcal{H}_\sigma^+$ называется объединенным пространством траекторий семейства $\{\mathcal{H}_\sigma^+ : \sigma \in \Sigma\}$. Очевидно, что множество $\mathcal{H}_\Sigma^+$ непусто и, следовательно, может рассматриваться как траекторное пространство.

Дадим основные определения.

Определение 3.2.1. *Множество $P \subset C(\mathbb{R}_+;E_0) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+;E)$ называется равномерно (относительно $\sigma \in \Sigma$) притягивающим (для семейства пространств $\{\mathcal{H}_\sigma^+ : \sigma \in \Sigma\}$), если для всякого множества $B \subset \mathcal{H}_\Sigma^+$, ограниченного в $L_\infty(\mathbb{R}_+;E)$, выполняется условие*

$$\sup_{u\in B} \inf_{v\in P} \|T(h)u - v\|_{C(\mathbb{R}_+;E_0)} \to 0 \quad (h \to \infty).$$

Определение 3.2.2. *Множество $P \subset C(\mathbb{R}_+;E_0) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+;E)$ называется равномерно (относительно $\sigma \in \Sigma$) поглощающим (для семейства пространств $\{\mathcal{H}_\sigma^+ : \sigma \in \Sigma\}$), если для всякого множества $B \subset \mathcal{H}_\Sigma^+$ ограниченного в $L_\infty(\mathbb{R}_+;E)$, существует $h \ge 0$, такое что при всех $t \ge h$ имеет место включение*

$$T(t)B \subset P.$$

Очевидно, любое равномерно поглощающее множество является равномерно притягивающим.

Определение 3.2.3. *Множество $\mathcal{U} \subset C(\mathbb{R}_+; E_0) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$ называется равномерным траекторным аттрактором (для семейства пространств $\{\mathcal{H}_\sigma^+ : \sigma \in \Sigma\}$), если оно удовлетворяет условиям*

(i) множество $\mathcal{U}$ компактно в $C(\mathbb{R}_+; E_0)$ и ограниченно в $L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$;

(ii) имеет место равенство $T(t)\mathcal{U} = \mathcal{U}$ для всех $t \geq 0$;

(iii) множество $\mathcal{U}$ является притягивающим в смысле определения 3.2.1.

Определение 3.2.4. *Минимальным траекторным аттрактором пространства траекторий $\mathcal{H}_\Sigma^+$ называется наименьший по включению траекторный аттрактор, то есть такой траекторный аттрактор, который содержится в любом другом траекторном аттракторе.*

Определение 3.2.5. *Множество $\mathcal{A} \subset E$ называют равномерным (относительно $\sigma \in \Sigma$) глобальным аттрактором (в E_0) семейства пространств $\{\mathcal{H}_\sigma^+ : \sigma \in \Sigma\}$, если оно удовлетворяет следующим условиям:*

(i) множество $\mathcal{A}$ компактно в E_0 и ограниченно в E;

(ii) для всякого ограниченного в $L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$ множества $B \in \mathcal{H}_\Sigma^+$ выполняется условие притягивания

$$\sup_{u \in B} \inf_{y \in \mathcal{A}} \|u(t) - y\|_{E_0} \to 0 \quad (t \to \infty);$$

(iii) множество $\mathcal{A}$ является является наименьшим по включению, удовлетворяющим условиям (i) и (ii) (то есть $\mathcal{A}$ содержится в каждом множестве, удовлетворяющим этим условиям).

Замечание 3.2.1. *Очевидно, что если семейство траекторных пространств имеет минимальный траекторный аттрактор, то он единственный; если имеет глобальный аттрактор, то он также единственный.*

Из определений 3.2.4 и 3.2.5 следует, что теоремы о существовании и свойствах аттракторов пространства траекторий автоматически переносятся на случай равномерных аттракторов. В частности, имеют место следующие теоремы существования (см. [25]).

Теорема 3.2.1. *Пусть существует компактое в $C(\mathbb{R}_+, E_0)$ и ограниченное в $L_\infty(\mathbb{R}_+, E)$ равномерно поглощающее множество P. Тогда существует минимальный равномерный траекторный аттрактор $\mathcal{U}$ семейства траекторных пространств $\{\mathcal{H}^+_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$.*

Теорема 3.2.2. *Пусть существует минимальный равномерный траекторный аттрактор $\mathcal{U}$ семейства траекторных пространств $\{\mathcal{H}^+_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$. Тогда существует равномерный глобальный аттрактор $\mathcal{A}$ семейства траекторных пространств $\{\mathcal{H}^+_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$ и справедливо соотношение*

$$\mathcal{A} = \mathcal{U}(t) \quad t \geq 0.$$

3.2.2 Формулировка основного результата

Введем пространство, в котором будут рассматриваться слабые решения системы (3.2.1)–(3.2.3):

$$W_1 = \{v \,:\, v \in L_2(0,T;V) \cap L_\infty(0,T;H), \quad v' \in L_1(0,T;V^*)\}.$$

Определение 3.2.6. *Пусть $v_0 \in H$, $f \in L_2(0,T;V^*)$. Слабым решением задачи (3.2.1)–(3.2.3) на отрезке $[0,T]$ называется функция $v \in W_1$, удовлетворяющая соотношению*

$$\langle v', \varphi \rangle - \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx + 2\int\limits_\Omega \nu(I_2(v))\mathcal{E}(v) : \mathcal{E}(\varphi)\, dx = \langle f, \varphi \rangle, \qquad (3.2.5)$$

при всех $\varphi \in V$, п.в. $t \in [0,T]$, и начальному условию

$$v|_{t=0} = v_0. \qquad (3.2.6)$$

Замечание 3.2.2. *Обозначим через $C_\omega(0,T;H)$ – пространство слабо непрерывных функций на $[0,T]$ со значениями в H. Известно (см. [60]; Глава III, Лемма 1.1, Лемма 1.4), что $W_1 \subset C_\omega(0,T;H)$. Следовательно начальное условие на функцию v имеет смысл.*

Множество символов для данной модели мы будем рассматривать в пространстве $\mathcal{X} = L_2^{loc}(\mathbb{R}_+; V^*)$. Для фиксированного $f \in \mathcal{X}$ в качестве пространства символов Σ системы (3.2.1)-(3.2.3) можно выбрать одно из следующих:

1. $\Sigma = \{f\}$;

2. $\Sigma = \Sigma_0(f) \stackrel{def}{=} \{T(t)f : t \geq 0\}$;
3. Σ – замыкание Σ_0 в сильной топологии пространства $\mathcal{X}$;
4. Σ – замыкание Σ_0 в слабой топологии пространства $\mathcal{X}$;
5. Σ – произвольное множество в пространстве $\mathcal{X}$, содержащее Σ_0 и имеющее свойство
$$\|\sigma\|_{\mathcal{X}} \leq \|f\|_{\mathcal{X}} \quad \sigma \in \Sigma; \tag{3.2.7}$$
6. Σ – произвольное множество со свойством (3.2.7) в пространстве $\mathcal{X}$, содержащее функцию f.

Разному выбору множества Σ отвечают разные, вообще говоря, равномерные аттракторы, но доказательство их существования одинаково для всех случаев. Каждый из приведённых случаев содержит предыдущий. Случай 1) соответствует наиболее простому решению, когда семейство траекторных пространств состоит из единственного пространства, образованного некоторыми слабыми решениями системы (3.2.1)-(3.2.3). В случаях 2)—5) добавляются пространства траекторий, состоящие из решений системы (3.2.1)-(3.2.3) с f, заменённым на $T(t)f$ $(t > 0)$. Случай 6) имеет самый общий характер. Предположим, что множество $\Sigma \subset \mathcal{X}$, удовлетворяющее самому слабому условию 6), выбрано и зафиксировано, и для любого $\sigma \in \Sigma$ выполняется неравенство (3.2.7).

Определение 3.2.7. *Пространством траекторий $\mathcal{H}_\sigma^+$ системы (3.2.1)-(3.2.3), соответствующим символу $\sigma \in \Sigma$, и банаховым пространствам $E = H$ и $E_0 = V^*$ назовём множество функций v, удовлетворяющих следующим условиям:*

(i) функция v принадлежит классу $L_2^{loc}(\mathbb{R}_+, V) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+, H)$;

(ii) функция v удовлетворяет равенству
$$\langle v', \varphi\rangle - \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx + 2\int\limits_\Omega \nu(I_2(v))\mathcal{E}(v) : \mathcal{E}(\varphi)\, dx = \langle \sigma(t), \varphi\rangle \tag{3.2.8}$$
при всех $\varphi \in V$, для почти всех $t \geq 0$;

(iii) при всех $t \geq 0$ функция v удовлетворяет неравенству
$$\frac{1}{2}\|v(t)\|^2_{L_\infty(t,t+1;H)} + \frac{C_4}{2}\|v(t)\|^2_{L_2(t,t+1;V)} \leq e^{-2\gamma t}\|v\|^2_{L_\infty(\mathbb{R}_+;H)} + \\ + \frac{5e^{2\gamma} - 1}{2C_4(e^{2\gamma} - 1)}\|f\|^2_{\mathcal{X}}, \tag{3.2.9}$$

где C_5 и γ некоторые положительные константы.

Сформулируем основные результаты данного параграфа.

Теорема 3.2.3. *Пусть $f \in \mathcal{X}$, и пусть множество символов $\Sigma \subset \mathcal{X}$, содержащее f, таково, что для каждого $\sigma \in \Sigma$ выполняется условие $\|\sigma\|_{\mathcal{X}} \leq \|f\|_{\mathcal{X}}$. Тогда существует минимальный равномерный траекторный аттрактор $\mathcal{U}$ семейства траекторных пространств $\{\mathcal{H}_\sigma^+ : \sigma \in \Sigma\}$ системы (3.2.1)–(3.2.3).*

Теорема 3.2.4. *Пусть функция f является элементом пространства $\mathcal{X}$, и пусть множество символов $\Sigma \subset \mathcal{X}$, содержащее f, таково, что для каждого $\sigma \in \Sigma$ выполняется условие $\|\sigma\|_{\mathcal{X}} \leq \|f\|_{\mathcal{X}}$. Тогда в пространстве H существует равномерный глобальный аттрактор семейства траекторных пространств $\{\mathcal{H}_\sigma^+ : \sigma \in \Sigma\}$ системы (3.2.1)–(3.2.3).*

3.2.3 Дополнительные оценки слабых решений

Теорема 3.2.5. *Пусть $f \in L_2(0, T; V^*)$ и $v_0 \in H$. Тогда на отрезке $[0, T]$ существует слабое решение $v(t)$ задачи (3.2.1)-(3.2.3), удовлетворяющее неравенству*

$$\frac{1}{2}\|v(t)\|^2_{L_\infty(t,t+1;H)} + \frac{C_4}{2}\|v(t)\|^2_{L_2(t,t+1;V)} \leq$$
$$\leq e^{-2\gamma t}\|v\|^2_{L_\infty(\mathbb{R}_+;H)} + \frac{5e^{2\gamma} - 1}{2C_4(e^{2\gamma} - 1)} \sup_{s\in[0,T-1]} \|f\|^2_{L_2(s,s+1;V^*)}, \quad (3.2.10)$$

где C_4 и γ некоторые константы больше нуля.

Для доказательства данной теоремы нам потребуется ввести «аппроксимационное» уравнение для уравнения (3.2.1). Рассмотрим следующую задачу, зависящую от параметра $\delta > 0$.

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{v_i}{1 + \delta|v|^2}\frac{\partial v}{\partial x_i} - \mathrm{Div}\{2\nu(I_2(v))\mathcal{E}(v)\} + \mathrm{grad}\, p = f, \quad (3.2.11)$$

$$\mathrm{div}\, v = 0; \quad v|_{t=0} = v_0; \quad v|_{\partial\Omega\times[0,T]} = 0. \quad (3.2.12)$$

Здесь $|v| = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i v_i}$. По аналогии определения слабого решения исходной задачи, определим слабое решение аппроксимационной задачи.

Определение 3.2.8. *Пусть $v_0 \in H$, $f \in L_2(0,T;V^*)$. Слабым решением задачи (3.2.11)–(3.2.12) на отрезке $[0,T]$ называется функция $v \in L_2(0,T;V) \cap L_\infty(0,T;H)$ с $v' \in L_2(0,T;V^*)$, удовлетворяющая соотношению*

$$\langle v', \varphi\rangle - \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n \frac{v_i v_j}{1+\delta|v|^2}\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\,dx, +2\int\limits_\Omega \nu(I_2(v))\mathcal{E}(v) : \mathcal{E}(\varphi)\,dx = \langle f, \varphi\rangle, \tag{3.2.13}$$

при всех $\varphi \in V$, п.в. $t \in [0,T]$, и начальному условию

$$v(0) = v_0. \tag{3.2.14}$$

Приведем две теоремы о существовании слабых решений (см. [98]).

Теорема 3.2.6. *Пусть $f \in L_2(0,T;V^*)$ и задано $v_0 \in H$. Тогда существует функция $v \in L_2(0,T;V) \cap L_\infty(0,T;H)$ с $v' \in L_2(0,T;V^*)$, которая является слабым решением задачи (3.2.11)–(3.2.12).*

Теорема 3.2.7. *Пусть $f \in L_2(0,T;V^*)$ и задано $v_0 \in H$. Тогда существует функция $v \in W_1$, которая является слабым решением задачи (3.2.1)–(3.2.3).*

Доказательство теоремы 3.2.5. Доказательство проведем в два этапа. На первом этапе докажем, что данной оценке удовлетворяет слабое решение аппроксимационной задачи. Во втором этапе при помощи предельного перехода распространим эту оценку на решения задачи (3.2.1)–(3.2.3). Пусть $v(t)$ – решение аппроксимационной задачи на интервале $[0,T]$. Так как тождество (3.2.11) выполняется для любого $\varphi \in V$, то оно верно для $v(t) \in V$. Тогда

$$\langle v'(t), v(t)\rangle = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|_H^2, \qquad \langle f(t), v(t)\rangle \le \|f(t)\|_{V^*}\|v(t)\|_V,$$

$$\int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n \frac{v_i v_j}{1+\delta|v|^2}\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\,dx = 0,$$

$$2\int\limits_\Omega \nu(I_2(v))\mathcal{E}(v) : \mathcal{E}(v)\,dx \ge 2C_1C_5\int\limits_\Omega \mathcal{E}(v) : \mathcal{E}(v)\,dx \ge C_4||v||_V^2.$$

Последнее неравенство выполнено в силу первого неравенства Корна (см. [100], Часть 1, Пункт 12). Используя данные соотношения получаем энергетическое неравенство

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|_H^2 + C_4\|v(t)\|_V^2 \le \|f(t)\|_{V^*}\|v(t)\|_V. \tag{3.2.15}$$

Получим оценку первого слагаемого в левой части равенства (3.2.10). Положим $\bar{v}(t) = e^{\gamma t} v(t)$, где γ – некоторое число больше нуля. Подставив новые функции в неравенство (3.2.15), получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} e^{-2\gamma t}\|\bar{v}(t)\|_H^2 + C_4 e^{-2\gamma t}\|\bar{v}(t)\|_V^2 \leq e^{-\gamma t}\|f(t)\|_{V^*}\|\bar{v}(t)\|_V.$$

Раскрыв производную произведения и умножив обе части на $e^{2\gamma t}$, получаем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\bar{v}(t)\|_H^2 - \gamma\|\bar{v}(t)\|_H^2 + C_4\|\bar{v}(t)\|_V^2 \leq e^{\gamma t}\|f(t)\|_{V^*}\|\bar{v}(t)\|_V.$$

Использовав следствие из неравенства Пуанкаре $\|v\|_H \leq k\|v\|_V$ $(\forall v \in V)$, придем к следующему неравенству:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\bar{v}(t)\|_H^2 - \gamma k^2\|v\|_V^2 + C_4\|\bar{v}(t)\|_V^2 \leq e^{\gamma t}\|f(t)\|_{V^*}\|\bar{v}(t)\|_V.$$

Положим $\gamma = \frac{C_1}{2k^2}$. Тогда придем к следующей оценке

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\bar{v}(t)\|_H^2 + \frac{C_4}{2}\|\bar{v}(t)\|_V^2 \leq e^{\gamma t}\|f(t)\|_{V^*}\|\bar{v}(t)\|_V.$$

Используя неравенство Коши $ab \leq \frac{\alpha}{2}a^2 + \frac{1}{2\alpha}b^2$, $\forall \alpha, a, b > 0$, с константой $\alpha = \frac{1}{C_4}$, получим:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\bar{v}(t)\|_H^2 + \frac{C_4}{2}\|\bar{v}(t)\|_V^2 \leq \frac{e^{2\gamma t}}{2C_4}\|f(t)\|_{V^*}^2 + \frac{C_4}{2}\|\bar{v}(t)\|_V^2.$$

Или

$$\frac{d}{dt}\|\bar{v}(t)\|_H^2 \leq \frac{e^{2\gamma t}}{C_4}\|f(t)\|_{V^*}^2.$$

Заменим t на s и проинтегрируем последнее неравенство от 0 до t, получим

$$\|\bar{v}(t)\|_H^2 \leq \|v_0\|_H^2 + \frac{1}{C_4}\int_0^t e^{2\gamma s}\|f(s)\|_{V^*}^2\, ds.$$

Вернемся к исходной функции $v(t)$ и домножим последнее неравенство на $e^{-2\gamma t}$

$$\|v(t)\|_H^2 \leq e^{-2\gamma t}\|v_0\|_H^2 + \frac{e^{-2\gamma t}}{C_4}\int_0^t e^{2\gamma s}\|f(s)\|_{V^*}^2\, ds.$$

Воспользуемся неравенством $\int_0^t a^s \xi(s)\, ds \leq \frac{2a^{t+1}}{a+1}\sup_{s\in[0,t-1]}\int_s^{s+1}|\xi(s)|\, ds$, где ξ – суммируемая функция, а $a > 1$ (см. [98]). Тогда

$$\|v(t)\|_H^2 \leq e^{-2\gamma t}\|v_0\|_H^2 + \frac{2e^{2\gamma}}{C_4(e^{2\gamma}-1)}\sup_{s\in[0,t-1]}\int_s^{s+1}\|f(\tau)\|_{V^*}^2\, d\tau.$$

Перейдем к максимуму по отрезку $[t, t+1] \subset [0, T-1]$. Получим оценку

$$\max_{s\in[t,t+1]} \|v(s)\|_H^2 \le e^{-2\gamma t}\|v_0\|_H^2 + \frac{2e^{2\gamma}}{C_4(e^{2\gamma}-1)} \sup_{s\in[0,T-1]} \|f\|^2_{L_2(s,s+1;V^*)}. \qquad (3.2.16)$$

Возвратимся к неравенству (3.2.15), чтобы получить оценку второго слагаемого в левой части неравенства (3.2.10). Оценим правую часть неравенства (3.2.15) с помощью неравенства Коши, с константой $\alpha = \frac{1}{C_4}$, получаем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|_H^2 + \frac{C_4}{2}\|v(t)\|_V^2 \le \frac{1}{2C_4}\|f(t)\|^2_{V^*}.$$

Заменим t на s и проинтегрируем по отрезку $[t, t+1] \subset [0, T]$, тогда

$$\frac{1}{2}\|v(t+1)\|_H^2 - \frac{1}{2}\|v(t)\|_H^2 + \frac{C_4}{2}\int_t^{t+1} \|v(s)\|_V^2\, ds \le \frac{1}{2C_4}\int_t^{t+1} \|f(s)\|^2_{V^*}\, ds \le$$
$$\le \frac{1}{2C_4} \sup_{s\in[0,T-1]} \|f(s)\|^2_{L_2(s,s+1;V^*)}. \qquad (3.2.17)$$

Складывая (3.2.16) и (3.2.17), получим

$$\frac{1}{2}\|v(t+1)\|_H^2 + \left(\max_{s\in[t,t+1]} \|v(s)\|_H^2 - \frac{1}{2}\|v(t)\|_H^2\right) + \frac{C_4}{2}\int_t^{t+1} \|v(s)\|_V^2\, ds \le$$
$$\le e^{-2\gamma t}\|v_0\|_H^2 + \frac{5e^{2\gamma}-1}{2C_4(e^{2\gamma}-1)} \sup_{s\in[0,T-1]} \|f(s)\|^2_{L_2(s,s+1;V^*)}. \qquad (3.2.18)$$

Воспользуемся тем, что $\max_s A(s) = 2\max_s \frac{1}{2}A(s)$, получим $\max_{s\in[t,t+1]} \|v(s)\|_H^2 - \frac{1}{2}\|v(t)\|_H^2 \ge 0$. Отбросив часть положительных слагаемых в левой части неравенства (3.2.18), получим

$$\frac{1}{2}\max_{s\in[t,t+1]} \|v(s)\|_H^2 + \frac{C_4}{2}\int_t^{t+1} \|v(s)\|_V^2\, ds \le$$
$$\le e^{-2\gamma t}\|v_0\|_H^2 + \frac{5e^{2\gamma}-1}{2C_4(e^{2\gamma}-1)} \sup_{s\in[0,T-1]} \|f(s)\|^2_{L_2(s,s+1;V^*)}.$$

Последнее неравенство и представляет оценку (3.2.10) решения v аппроксимационной задачи.

Доказательства существования решений системы (3.2.1)–(3.2.3), удовлетворяющих оценке (3.2.10) осуществим с помощью предельного перехода. Пусть $\{\delta_l\}_{l=1}^{\infty}$ – сходящаяся к нулю последовательность чисел, такая что,

$\delta_l > 0$, и пусть v_l – решение на отрезке $[0, T]$ аппроксимационной задачи, с $\delta = \delta_l$. Без ограничения общности можно считать, что существует слабый предел

$$v = \lim_{l\to\infty} v_l.$$

Можно считать, что данный предел подразумевается в смысле слабой сходимости в $L_2(0, T; V)$ и $*$-слабой сходимости в $L_\infty(0, T; H)$. Эти пределы также имеют место в смысле слабой сходимости в $L_2(t, t+1; V)$ и $*$-слабой сходимости в $L_\infty(t, t+1; H)$ для любого $t \geq 0$. Предельная функция является решением задачи (3.2.1)-(3.2.3).

Так же, в силу слабой сходимости выполнены следующие соотношения

$$\|v\|_{L_2(t,t+1;V)} \leq \underline{\lim}_{l\to\infty} \|v_l\|_{L_2(t,t+1;V)}$$

$$\|v\|_{L_\infty(t,t+1;H)} \leq \underline{\lim}_{l\to\infty} \|v_l\|_{L_\infty(t,t+1;H)}.$$

Следовательно

$$\frac{1}{2}\|v\|^2_{L_\infty(t,t+1;H)} + \frac{C_4}{2}\|v\|^2_{L_2(t,t+1;V)} \leq \underline{\lim}_{l\to\infty} \left(\frac{1}{2}\|v_l\|^2_{L_\infty(t,t+1;H)} + \frac{C_4}{2}\|v_l\|^2_{L_2(t,t+1;V)} \right) \leq$$
$$\leq e^{-2\gamma t}\|v_0\|^2_H + \frac{5e^{2\gamma} - 1}{2C_4(e^{2\gamma} - 1)} \sup_{s\in[0,T-1]} \|f(s)\|^2_{L_2(s,s+1;V^*)}.$$

Осталось отметить, что $\|v_0\|_H = \|v(0)\|_H \leq \|v\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+;H)}$. Таким образом, мы получили в точности оценку (3.2.10).

$\square$

Лемма 3.2.1. *Пусть v – слабое решение задачи (3.2.1)-(3.2.3) на $[0, T]$. Тогда $v' \in L_{4/3}(0, T; V^*)$, и при $0 \leq t \leq T - 1$ имеет место оценка*

$$\|v'\|_{L_{4/3}(t,t+1;V^*)} \leq C_6 \left(\|v\|^{\frac{1}{2}}_{L_\infty(t,t+1;H)} \|v\|^{\frac{3}{2}}_{L_2(t,t+1;V)} + \|v\|_{L_\infty(t,t+1;V)} + \|f\|_{L_2(t,t+1;V^*)} \right). \tag{3.2.19}$$

с постоянно C_6 не зависящей от v.

Доказательство. При всех $\varphi \in V$ имеем равенство

$$\langle v', \varphi \rangle = -2 \int_\Omega \nu(I_2(v))\mathcal{E}(v) : \mathcal{E}(\varphi)\, dx + \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx + \langle f, \varphi \rangle, \tag{3.2.20}$$

Данное тождество выполняется почти всюду на $[0,T]$. Покажем, что слагаемые в правой части принадлежат пространству $L_{4/3}(0,T)$ и оценим их нормы в пространствах $L_{4/3}(t,t+1),\ \ t\le T-1$. Так как при почти всех $s\in[0,T]$ имеем $v(t)\in V$, и имеет место вложение $V\subset(L_4(\Omega))$, то $v_j(t)v(t)\in L_4(\Omega)$. С помощью интегрального и арифметического неравенства Коши - Буняковского получаем

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\left(v_j(t)v(t),\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)\right|\le\sum_{i=1}^{n}\|v_j(t)v(t)\|_{L_2(\Omega)}\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right\|_{L_2(\Omega)}\le$$
$$\le\left(\sum_{i=1}^{n}\|v_i(t)v(t)\|^2_{L_2(\Omega)}\right)^{\frac12}\left(\sum_{i=1}^{n}\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right\|^2_{L_2(\Omega)}\right)^{\frac12}.$$

Второй множитель полученного выражения равен $\|\varphi\|_V$:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right\|^2_{L_2(\Omega)}\right)^{\frac12}=\left(\sum_{i,j=1}^{n}\left\|\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\right\|^2_{L_2(\Omega)}\right)^{\frac12}=\|\varphi\|_V.$$

Оценим первый множитель с помощью неравенства Гёльдера

$$\sum_{i=1}^{n}\|v_j(t)v(t)\|^2_{L_2(\Omega)}=\sum_{i,j=1}^{n}\|v_i(t)v_j(t)\|^2_{L_2(\Omega)}\le$$
$$\le\sum_{i,j=1}^{n}\|v_i(t)\|^2_{L_4(\Omega)}\|v_j(t)\|^2_{L_4(\Omega)}=\left(\sum_{i=1}^{n}\|v_i(t)\|^2_{L_4(\Omega)}\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\|v_j(t)\|^2_{L_4(\Omega)}\right)=$$
$$=\|v\|^4_{L_4(\Omega)}$$

Таким образом, получаем:

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\left(v_j(t)v(t),\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)\right|\le\|v\|^2_{L_4(\Omega)}\|\varphi\|_V.$$

Из полученной оценки и неравенства

$$\|z\|_{L_4(\Omega)}\le C_7\|z\|^{\frac14}_{L_2(\Omega)}\|\nabla z\|^{\frac34}_{L_2(\Omega)},(n=2,3),$$

выполняющегося для функций $z\in H^1_0$ с константой C_7, не зависящей от z, получаем следующее неравенство

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\left(v_j(t)v(t),\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)\right|\le C_7^2\|v(t)\|^{\frac12}_{H}\|v(t)\|^{\frac32}_{V}\|\varphi\|_V.$$

Для первого и третьего слагаемых в правой части тождества (3.2.20) имеем соотношения

$$\left|2\int\limits_{\Omega}\nu(I_2(v))\mathcal{E}(v):\mathcal{E}(\varphi)\,dx\right|\le C_8\|v\|_V\|\varphi\|_V;$$

$$|\langle f(t),\varphi\rangle|\le\|f(t)\|_{V^*}\|\varphi\|_V.$$

Складывая полученные неравенства, получаем оценку

$$|\langle v',\varphi\rangle|\le\left(C_7^2\|v(t)\|_H^{\frac{1}{2}}\|v(t)\|_V^{\frac{3}{2}}+C_8\|v(t)\|_V+\|f(t)\|_{V^*}\right)\|\varphi\|_V,$$

откуда, в силу произвольности φ, следует

$$\|v'\|_{V^*}\le C_7^2\|v(t)\|_H^{\frac{1}{2}}\|v(t)\|_V^{\frac{3}{2}}+C_8\|v(t)\|_V+\|f(t)\|_{V^*}.$$

Так как функция v принадлежит классу $L_2(0,T;V)\cap L_\infty(0,T;H)$, то каждое слагаемое в правой части неравенства суммируемо на $[0,T]$ со степенью $4/3$, а значит левая часть неравенства тоже суммируема с этой степенью. Далее, при $t\le T-1$ с помощью неравенства Минковского получаем

$$\|v'\|_{L_{4/3}(t,t+1;V^*)}=\left(\int\limits_t^{t+1}\|v'\|_{V^*}^{\frac{4}{3}}\,ds\right)^{\frac{3}{4}}\le\left(\int\limits_t^{t+1}C_7^{\frac{8}{3}}\|v\|_H^{\frac{2}{3}}\|v\|_V^2\,ds\right)^{\frac{3}{4}}+$$
$$+\left(\int\limits_t^{t+1}C_8^{\frac{4}{3}}\|v\|_V^{\frac{4}{3}}\,ds\right)^{\frac{3}{4}}+\left(\int\limits_t^{t+1}\|f\|_{V^*}^{\frac{4}{3}}\,ds\right)^{\frac{3}{4}}\le$$
$$\le C_7^2\|v\|_{L_\infty(t,t+1;H)}^{\frac{1}{2}}\|v\|_{L_2(t,t+1;V)}^{\frac{3}{2}}+C_8\|v\|_{L_\infty(t,t+1;V)}+\|f\|_{L_{4/3}(t,t+1;V^*)}.$$

С учетом того, что $\|f\|_{L_{4/3}(t,t+1;V^*)}\le\|f\|_{L_2(t,t+1;V^*)}$, получим требуемую оценку

$$\|v'\|_{L_{4/3}(t,t+1;V^*)}\le C_6(\|v\|_{L_\infty(t,t+1;H)}^{\frac{1}{2}}\|v\|_{L_2(t,t+1;V)}^{\frac{3}{2}}+$$
$$+\|v\|_{L_\infty(t,t+1;V)}+\|f\|_{L_2(t,t+1;V^*)});$$

с некоторой константой C_6, не зависящей от v. □

Теорема 3.2.8. *Существует постоянная C_9, такая что для любого слабого решения v системы (3.2.1)–(3.2.3) на $[0,T]$, удовлетворяющая оценке*

(3.2.10), выполняется неравенство

$$\|v\|_{L_\infty(t,t+1;H)} + \|v\|_{L_2(t,t+1;V)} + \|v'\|_{L_{4/3}(t,t+1;V^*)} \leq \\ \leq C_9 \left(1 + e^{-2\gamma t}\|v_0\|_H^2\right) \leq C_9 \left(1 + e^{-2\gamma t}\|v\|^2_{L_\infty(\mathbb{R}_+;H)}\right). \tag{3.2.21}$$

Доказательство. Для краткости обозначим

$$A = 1 + e^{-2\gamma t}\|v\|^2_{L_\infty(\mathbb{R}_+;H)} \geq 1.$$

Ясно, что можно подобрать такое число C_{10}, что для норм, стоящих в левой части неравенства 3.2.10, будут выполняться оценки

$$\|v\|_{L_\infty(t,t+1;H)} \leq C_{10}^2 A; \tag{3.2.22}$$

$$\|v\|_{L_2(t,t+1;V)} \leq C_{10}^2 A. \tag{3.2.23}$$

Оценим производную v' через A. Согласно неравенству (3.2.19) с учетом того, что $A \geq A^{\frac{1}{2}}$, имеем

$$\|v'\|_{L_{4/3}(t,t+1;V^*)} \leq C_{11}\left(C_{10}^2 A + C_{10}A^{\frac{1}{2}} + \|f\|_{V^*}\right) \leq C_{12}A. \tag{3.2.24}$$

где C_{12} — достаточно большое число, не зависящее от A. Без ограничения общности это число можно считать настолько большим, что правые части неравенства (3.2.22), (3.2.23) мажорируются величиной $C_{12}A$, поэтому из неравенства (3.2.22)–(3.2.24) следует доказываемое неравенство (3.2.21). □

3.2.4 Доказательство существования равномерных аттракторов

В этом параграфе мы докажем существование минимального равномерного траекторного аттрактора и равномерного глобального аттрактора.

Чтобы данное в определении 3.2.8 пространство траекторий было корректно, нужно убедиться, что пространство непусто, и проверить включение

$$\mathcal{H}_\sigma^+ \subset C(\mathbb{R}_+; V^*) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; H).$$

Включение $\mathcal{H}_\sigma^+ \subset L_\infty(\mathbb{R}_+; H)$ непосредственно следует из определения пространства траекторий. Покажем непрерывность траекторий. Если v некоторая траектория, то согласно замечанию (3.2.3) на произвольном отрезке

$[0, T]$ имеем $\Pi_T v \in L_\infty(0, T; H)$, $\Pi_T v' \in L_{\frac{4}{3}}(0, T; V^*)$ поэтому для тройки пространств $X = H, B = Y = V^*$из теоремы 1.1.5 следует, что $\Pi_T v \in C(0, T; V^*)$. Так как это верно при любом T, следовательно $v \in C(\mathbb{R}_+; V^*)$, что и требовалось.

Замечание 3.2.3. *Если функция v удовлетворяет введенному выше пространству траекторий, то функция v имеет производную $v' \in L^{loc}_{4/3}(\mathbb{R}_+, V^*)$, что следует из леммы 3.2.1.*

Имеет место следующая теорема о существовании траекторий.

Теорема 3.2.9. *Пусть $\sigma \in \Sigma$ — некоторый символ. Тогда для любого $v_0 \in H$, существует траектория $v \in \mathcal{H}^+_\sigma$, удовлетворяющая начальному условию*

$$v(0) = v_0.$$

Доказательство. Для заданного $\sigma \in \Sigma$ рассмотрим уравнение

$$\langle v', \varphi \rangle - \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx + 2\int\limits_\Omega \nu(I_2(v))\mathcal{E}(v) : \mathcal{E}(\varphi)\, dx = \langle \sigma(t), \varphi \rangle$$

Пусть v_m – существующее (по теореме 3.2.5) решение этой задачи на $[0, T_m]$ с начальным условием $v_m(0) = v_0$ на $[0, T_m]$, где $\{T_m\}$ возрастающая, стремящаяся к бесконечности последовательность положительных чисел. Отметим, что решение v_m на любом отрезке $[0, T_m]$ удовлетворяет оценке (3.2.10), и следовательно оценке (3.2.21). Продолжим эту функцию константой по непрерывности на $\mathbb{R}_+$ до функции $\tilde{v}_m$, положив

$$\tilde{v}_m = \begin{cases} v_m(t), \text{если } 0 < t < T_m; \\ v_m(T_m), \text{если } T_m < t; \end{cases}$$

Покажем, что последовательность $\{\tilde{v}_m\}$ относительно компактна в $C(\mathbb{R}_+; V^*)$. Для этого воспользуемся следующим фактом: чтобы множество $P \subset C(\mathbb{R}_+; V^*)$ было относительно компактно в $C(\mathbb{R}_+; V^*)$ необходимо и достаточно, чтобы при любом T > 0 множество $\Pi_T P$ было относительно компактно в $C(0, T; V^*)$, где $\Pi_T P$ — сужение множества функций из P на отрезок $[0, T]$. Используя его, достаточно показать, что последовательность $\Pi_T \tilde{v}_m$ ограничение этих функций на произвольный отрезок $[0, T]$ относительно компактны в $C(0, T; V^*)$. Ограничение $\Pi_T \tilde{v}_m$ являются слабыми решениями задачи (3.2.1)–(3.2.3) при всех достаточно больших m, поэтому из этого следуют ограниченность последовательности в норме пространства $L_\infty(0,T;H)$ и ограниченность последовательностей производных по времени в норме пространства $L_{4/3}(0,T;V^*)$. По теореме 1.1.5, получаем что последовательность $\Pi_T\tilde{v}_m$ относительно компактна в $C(0,T;V^*)$. В силу произвольности T получаем, что последовательность $\{\tilde{v}_m\}$ относительно компактна в $C(\mathbb{R}_+;V^*)$. Следовательно, она содержат подпоследовательность $\tilde{v}_{mk}$ сходящуюся в $C(\mathbb{R}_+;V^*)$ к некоторой функции v^*.

Покажем, что $v\in\mathcal{H}^+_\sigma$. Пусть $T>0$. Так как $\tilde{v}_{mk}$ сходится к v^* в $C(\mathbb{R}_+;V^*)$, то сужение $\Pi_T\tilde{v}_{mk}$ сходятся к $\Pi_T v^*$ в $C(0,T;V^*)$. При всех достаточно больших k функция $\Pi_T\tilde{v}_{mk}$ является слабым решением задачи (3.2.1)–(3.2.3), поэтому выполняются неравенство

$$\|\Pi_T\tilde{v}_{mk}\|_{L_\infty(t,t+1;H)}+\|\Pi_T\tilde{v}_{mk}\|_{L_2(t,t+1;V)}+\|\Pi_T\tilde{v}'_{mk}\|_{L_{4/3}(t,t+1;V^*)}\leq$$
$$\leq C_9\left(1+e^{-2\gamma t}\|v_0\|^2_H\right). \tag{3.2.25}$$

Следовательно, последовательность $\{\Pi_T\tilde{v}_{mk}\}$ ограничена в норме пространства $L_\infty(0,T;H)$, поэтому к предельной функции $\Pi_T v$ она сходится $*$-слабо в $L_\infty(0,T;H)$. Кроме того, последовательность производных $\{\Pi_T\tilde{v}'_{mk}\}$ ограничена в $L_{4/3}(0,T;V^*)$. Как и при доказательстве предельного перехода в теореме 3.2.5 отсюда выводится, что предельная функция является решением задачи (3.2.1)–(3.2.3). Переходя к пределу в неравенстве (3.2.25), для предельной функции $\Pi_T v^*$ получаем

$$\|\Pi_T v^*\|_{L_\infty(t,t+1;H)}+\|\Pi_T v^*\|_{L_2(t,t+1;V)}+\|\Pi_T {v^*}'\|_{L_{4/3}(t,t+1;V^*)}\leq$$
$$\leq C_9\left(1+e^{-2\gamma t}\|v_0\|^2_H\right).$$

В силу произвольности T эти неравенства выполняются при всех $t\in\mathbb{R}_+$, отсюда следует $v^*\in L_\infty(\mathbb{R}_+;H)$. Из этой оценки и следует неравенство (3.2.9), поскольку $\|\sigma\|_{\mathcal{X}}\leq\|f\|_{\mathcal{X}}$ и так как $\|v_0\|_H=\|v(0)\|_H\leq\|v\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+;H)}$.

$\square$

Теорема 3.2.10. *Пусть $f\in\mathcal{X}$, и пуст множество символов $\Sigma\subset\mathcal{X}$, содержащее f, таково, что для каждого $\sigma\in\Sigma$ выполняется условие $\|\sigma\|_{\mathcal{X}}\leq\|f\|_{\mathcal{X}}$. Тогда существует минимальный равномерный траекторный* *аттрактор* $\mathcal{U}$ *семейства траекторных пространств* $\{\mathcal{H}_\sigma^+ : \sigma \in \Sigma\}$ *системы (3.2.1)–(3.2.3).*

Доказательство. Для доказательства достаточно построить равномерно поглощающее множество P. Заметим, что из свойства (iii) определения 3.2.7 следует, что каждая траектория v каждого из пространств $\mathcal{H}_\sigma^+$ удовлетворяет неравенству

$$\|v\|_{L_\infty(t,t+1;H)} + \|v\|_{L_2(t,t+1;V)} + \|v'\|_{L_{4/3}(t,t+1;V^*)} \leq \\ \leq C_9 \left(1 + e^{-2\gamma t}\|v\|^2_{L_\infty(\mathbb{R}_+;H)}\right). \tag{3.2.26}$$

Рассмотрим множество $P \subset C(\mathbb{R}_+; V^*) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; H)$, состоящее из функций v, для которых при всех $t \geq 0$ выполняется неравенство

$$\|v\|_{L_\infty(t,t+1;H)} + \|v\|_{L_2(t,t+1;V)} + \|v'\|_{L_{4/3}(t,t+1;V^*)} \leq 2C_9. \tag{3.2.27}$$

Из неравенства (3.2.27) следует, что для любого $T \geq 0$ функции $v \in P$ ограничены в $L_\infty(0,T;H)$, а их производные v' в $L_{4/3}(t,t+1;V^*)$. Тогда множество $\Pi_T P$ относительно компактно в $C(0,T;V^*)$ (см. [144]). Так как это верно для любого $T > 0$, следовательно P относительно компактно в $C(\mathbb{R}_+; V^*)$.

Покажем, что множество P замкнуто в $C(\mathbb{R}_+, V^*)$ и, следовательно, компактно в этом пространстве. Пусть последовательность $\{v_m\} \subset P$ сходится к v в метрике пространства $C(\mathbb{R}_+, V^*)$. Покажем, что $v \in P$.

Из определения множества P следует выполнение неравенства

$$\|v_m\|_{L_\infty(t,t+1;H)} + \|v_m\|_{L_2(t,t+1;V)} + \|v'_m\|_{L_{4/3}(t,t+1;V^*)} \leq 2C_9. \tag{3.2.28}$$

Покажем, что v принадлежит классу $C(\mathbb{R}_+; V^*) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; H)$. По построению имеем $v \in C(\mathbb{R}_+; V^*)$. Далее, из неравенства (3.2.28) следует, что для любого отрезка $[t, t+1]$ норма $\operatorname{vrai}\max\limits_{s\in(t,t+1)}\|v_m(s)\|_H = \|v_m\|_{L_\infty(t,t+1;H)}$ ограничена числом $2C_9$, не зависящем от m и t. Следовательно норма $\operatorname{vrai}\max\limits_{s>0}\|v_m(s)\|_H = \|v_m\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+;H)}$ ограничена тем же числом, и последовательность $\{v_m\}$ сходится к своей предельной функции v *-слабо в $L_\infty(\mathbb{R}_+; H)$. Это значит, что предельная функция принадлежит пространству $L_\infty(\mathbb{R}_+; H)$.

Рассмотрим произвольный отрезок $[t, t+1]$, $t \geq 0$. Так как $v_m \to v$ в $C(\mathbb{R}_+; V^*)$, то $v_m \to v$ в $C(t, t+1; V^*)$. Нормы, стоящие в левой в левой части неравенства (3.2.28), ограничены, поэтому имеем $v_m \to v$ *-слабо в $L_\infty(t, t+1; H)$ и слабо в $L_2(t, t+1; V)$. Далее, существуют подпоследовательность $v'_{m_k} \to v$ слабо в $L_{4/3}(t, t+1; V^*)$. Однако в смысле распределений $\mathcal{D}'(t, t+1; V^*)$ имеем $v'_{m_k} \to v'$. Пользуясь верхней полунепрерывностью нормы в слабой топологии, для предельных функций получаем:

$$\|v\|_{L_\infty(t,t+1;H)} + \|v\|_{L_2(t,t+1;V)} + \|v'\|_{L_{4/3}(t,t+1;V^*)} \leq$$
$$\leq \varliminf_{k\to\infty} \left(\|v_{m_k}\|_{L_\infty(t,t+1;H)} + \|v_{m_k}\|_{L_2(t,t+1;V)} + \|v'_{m_k}\|_{L_{4/3}(t,t+1;V^*)} \right) \leq 2C_9.$$

Таким образом, v удовлетворяет неравенству (3.2.27) и, таким образом, принадлежит множеству P. Замкнутость и компактность множества P доказаны. Покажем, что P является равномерно поглощающим множеством для $\mathcal{H}^+_\Sigma$. Пусть множество $B \in \mathcal{H}^+_\Sigma$ ограничено в $L_\infty(\mathbb{R}_+; H)$, т. е. для $v \in B$ имеем $\|v\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+;H)} \leq C_{10}$. Пусть $h_0 \geq 0$ таково, что $2C_{10}^2 e^{-2\gamma h_0} \leq 1$. Тогда для $v \in B$ при $h \geq h_0$ в соответствии с неравенством (3.2.26) имеем

$$\|T(h)v\|_{L_\infty(t,t+1;H)} + \|T(h)v\|_{L_2(t,t+1;V)} + \|T(h)v'\|_{L_{4/3}(t,t+1;V^*)} =$$
$$= \|v\|_{L_\infty(t+h,t+h+1;H)} + \|v\|_{L_2(t+h,t+h+1;V)} + \|v'\|_{L_{4/3}(t+h,t+h+1;V^*)} \leq$$
$$\leq C_9 \left(1 + e^{-2\gamma(t+h)} \|v\|^2_{L_\infty(\mathbb{R}_+;H)}\right) \leq C_9 \left(1 + C_{10}^2 e^{-2\gamma(t+h)}\right) \leq 2C_9.$$

Таким образом, для $T(h)v$ неравенство 3.2.26 выполняется, и, следовательно, $T(h)B \subset P$ при $h > h_0$. Значит, множество P является равномерно поглощающим.

Также легко видеть, что $T(h)P \subset P$ при всех $h > 0$. Таким образом, множество P является ограниченным в $L_\infty(\mathbb{R}_+; H)$, относительно компактным в $C(\mathbb{R}_+; V^*)$ поглощающим (следовательно, и притягивающим) множеством. Следовательно, по общей теореме 3.2.1, существует минимальный равномерный траекторный аттрактор $\mathcal{U}$ семейства траекторных пространств $\{\mathcal{H}^+_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$. □

Теорема 3.2.11. *В условиях теоремы 3.2.10 в пространстве H существует равномерный глобальный аттрактор $\mathcal{A}$ семейства траекторных пространств $\{\mathcal{H}^+_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$ системы (3.2.1)–(3.2.3).*

Доказательство. Согласно теореме 3.2.2 для существования равномерного глобального аттрактора семейства пространства траекторий достаточно существование минимального равномерного траекторного аттрактора. Однако существование последнего устанавливается теоремой 3.2.3. □

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Все поставленные цели и задачи диссертации полностью выполнены. А именно, на основе аппроксимационно–топологического подхода к исследованию задач математической гидродинамики получены следующие результаты:

1) Доказано существование в ограниченной области пространства R^n, $n = 2, 3$, слабых решений начально–краевой задачи для дробной альфа–модели Фойгта и установлена сходимость решений альфа–модели к решению исходной модели при стремлении параметра альфа к нулю (теоремы 1.1.3, 1.1.4).

2) Доказано существование в ограниченной области пространства R^n, $n = 2, 3$, слабых решений начально–краевой задачи для альфа–модели, описывающей движение водных растворов полимеров, и установлена сходимость решений альфа–модели к решению исходной модели при стремлении параметра альфа к нулю (теоремы 1.2.1, 1.2.2).

3) Доказано существование в ограниченной области пространства R^n, $n = 2, 3$, слабых решений начально–краевой задачи для математической модели Фойгта с вязкостью зависящей от температуры (теорема 2.1.2).

4) Доказано существование оптимального управления с обратной связью для математической модели Фойгта с вязкостью зависящей от температуры (теоремы 2.2.1, 2.2.2).

5) Доказано существование в ограниченной области пространства R^n, $n = 2, 3$, слабых решений начально–краевой задачи для математической модели Кельвина–Фойгта с вязкостью зависящей от температуры (теорема 2.3.1).

6) Доказано существование в ограниченной области пространства R^n, $n = 2, 3$, слабых решений начально–краевой задачи для математической модели с реологическим соотношением, удовлетворяющим принципу объективности, и с вязкостью зависящей от температуры (теорема 2.4.1).

7) Доказано существование в ограниченной области пространства R^n, $n = 2, 3$, слабых решений начально–краевой задачи для альфа–модели Лере с вязкостью зависящей от температуры (теорема 2.5.1).

8) Доказано существование оптимального управления с обратной связью для альфа–модели Лере с вязкостью зависящей от температуры (теоремы 2.6.1, 2.6.2).

9) Доказано существование pullback–аттракторов для математической модели, описывающей движение водных растворов полимеров (теорема 3.1.4).

10) Доказано существование равномерных аттракторов для математической модели нелинейно–вязких сред (теоремы 3.2.3, 3.2.4).

Все результаты диссертационной работы носят теоретический характер, являются новыми и получены лично автором. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [157]–[173]. Все работы опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ. Работы [157], [158], [167], [170], [173] опубликованы в журналах из квартеля Q1 по международным базам Web of Science или Scopus. Из совместных работ [158], [159], [161], [163] в диссертацию вошли только результаты, полученные диссертантом лично.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Список использованных источников

1. Агранович М. С. Эллиптические граничные задачи с параметром и параболические задачи общего вида / М. С. Агранович, М. И. Вишик // Успехи математических наук. – 1964. – Т. 19, № 3. – С. 53–161.

2. Амфилохиев В. Б. Течение полимерных растворов при наличии конвективных ускорений / В. Б. Амфилохиев, Я. И. Войткунский, Н. П. Мазаева, Я. С. Ходорновский // Труды Ленинградского ордена Ленина кораблестроительного иститута. – 1975. – Т. 96. – С. 3–9.

3. Амфилохиев В. Б., Павловский В. А. Экспериментальные данные о ламинарно–турбулентном переходе при движении растворов полимеров в трубах / В. Б. Амфилохиев, В. А. Павловский // Труды Ленинградского ордена Ленина кораблестроительного иститута. – 1975. – Т. 104. – С. 3–5.

4. Антонцев С. Н., Кажихов А. В., Монахов В. Н. Краевые задачи механики / С. Н. Антонцев, А. В. Кажихов, В. Н. Монахов. – Новосибирск. 1983.

5. Арнольд В. И., Хесин Б. А. Топологические методы в гидродинамике / В. И. Арнольд, Б. А. Хесин. – М.: МЦНМО. 2007. – 392 с.

6. Астарита Дж., Маруччи Дж. Основы гидродинамики неньютоновских жидкостей / Дж. Астарита, Дж. Маруччи. – М.: Мир. 1979. – 309 с.

7. Ахмеров Р. Р. Меры некомпактности и уплотняющие операторы / Р. Р. Ахмеров, М. И. Каменский, А. С. Потапов и др. – Новосибирск. 1986.

8. Бабин А. В., Вишик М. И. Аттракторы системы Навье–Стокса и параболических уравнений и оценка их размерности / А. В. Бабин, М. И. Вишик // Записки научных семинаров ЛОМИ. – 1982. – Т. 115. – С. 3–15.

9. Бабин А. В., Вишик М. И. Аттракторы эволюционных уравнений с частными производными и оценки их размерности / А. В. Бабин, М. И. Вишик // Успехи математических наук. – 1983. – Т. 38. – С. 133–187.

10. Баренблатт Г. И., Калашников В. Н. О влиянии надмолекулярных образований в разбавленных растворах полимеров на турбулентность / Г. И. Ба-

ренблатт, В. Н. Калашников // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1968. – Т. 3. – С. 68–73.

11. Бетчов Р., Криминале В. Вопросы гидродинамической устойчивости / Р. Бетчов, В. Криминале.– М.: Мир, 1971. – 350 с.

12. Борисович Ю. Г. Топологические методы в теории неподвижных точек многозначных отображений / Ю. Г. Борисович, Б. Д. Гельман, А. Д. Мышкис, В. В. Обуховский // Успехи математических наук. – 1980. – Т. 211. – С. 59–126.

13. Борисович Ю. Г. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений / Ю. Г. Борисович, Б. Д. Гельман, А. Д. Мышкис, В. В. Обуховский. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: УРСС: Либроком, 2011. – 224 с.

14. Виноградов Г. В., Малкин А. Я. Реология полимеров / Г. В. Виноградов, А. Я. Малкин.– М.: Химия, 1977. – 440 с.

15. Войткунский Я. И., Амфилохиев В. Б., Павловский В. А. Уравнения движения жидкости с учетом ее релаксационных свойств / Я. И. Войткунский, В. Б. Амфилохиев, В. А. Павловский // Труды Ленинградского ордена Ленина кораблестроительного иститута. – 1970. – Т. 69. – С. 19–26.

16. Ворович И. И. Стационарные течения вязкой несжимаемой жидкости / И. И. Ворович, В. И. Юдович // Математический сборник. – 1961. – Т. 53, № 4. – С. 393–428.

17. Гольдштейн Р. В. Механика сплошных сред. Часть I / Р. В. Гольдштейн, В. А. Городцов. – Наука. Физматлит, 2000. – 256 с.

18. Дмитриенко В. Т. Гомотопическая классификация одного класса непрерывных отображений / В. Т. Дмитриенко, В. Г. Звягин // Математические заметки. – 1982. – Т. 31, № 5. – С. 801–812.

19. Звягин А. В. Исследование математических моделей движения растворов полимеров с субстациональной и объективной производными: дис. ... канд. физ.–мат. наук: 01.01.02 / Воронежский государственный университет. — Воронеж, 2014. 139 с.

20. Звягин А. В. Исследование математических моделей движения растворов полимеров с субстациональной и объективной производными: авторе-

ферат дис. ... канд. физ.–мат. наук: 01.01.02 / Воронежский государственный университет. — Воронеж, 2014. 16 с.

21. Звягин А. В. Оптимальное управление с обратной связью для одной термовязкоупругой модели, удовлетворяющей принципу объективности / А. В. Звягин // Современные методы и проблемы математической гидродинамики – 2018: материалы международной научной конференции (3–8 мая 2018 г.). — Воронеж:ВГУ. — 2018. — С. 166–179.

22. Звягин А. В., Орлов В. П. Разрешимость задачи термовязкоупругости для одной модели Осколкова / А. В. Звягин, В. П. Орлов // Известия Вузов. Математика. – 2014. – Т. 9. – С. 69–74.

23. Звягин А. В., Поляков Д. М. О разрешимости альфа–модели Джеффриса–Олдройда / А. В. Звягин, Д. М. Поляков // Дифференциальные уравнения. – 2016. – Т. 52. – С. 782–787.

24. Звягин В. Г. Аппроксимационно–топологический подход к исследованию математических задач гидродинамики / В. Г. Звягин // Современная математика. Фундаментальные направления. – 2012. – Т. 46. – С. 92–119.

25. Звягин В. Г. Аттракторы уравнений неньютоновской гидродинамики / В. Г. Звягин, С. К. Кондратьев // Успехи математических наук. – 2014. – Т. 419. – С. 81–156.

26. Звягин В. Г. Pullback–аттракторы модели движения слабо концентрированных водных растворов полимеров / В. Г. Звягин, С. К. Кондратьев // Известия Российской академии наук. Серия математическая. – 2015. – Т. 79, № 4. – С. 3–26.

27. Звягин В. Г. Аппроксимационно–топологический подход к исследованию задач гидродинамики / В. Г. Звягин, В. Т. Дмитриенко. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 112 с.

28. Звягин В. Г. О слабых решениях регуляризованной модели вязкоупругой жидкости / В. Г. Звягин, В. Т. Дмитриенко // Дифференциальные уравнения. – 2002. – Т. 38, № 12. – С. 1633–1645.

29. Звягин В. Г., Звягин А. В. Оптимальное управление с обратной связью для термовязкоупругой модели движения водных растворов полимеров / В. Г. Звягин, А. В. Звягин // Математические труды. – 2018. – № 2. –

С. 181–203. *Translation into English:* Zvyagin V. G., Zvyagin A. V. Optimal feedback control for a thermoviscoelastic model of the motion of polymer solutions / V. G. Zvyagin, A. V. Zvyagin // Siberian advances in mathematics. – 2019. – V. 29, №. 2. – P. 137–152.

30. Звягин А. В., Звягин В. Г., Поляков Д. М. Разрешимость альфа–моделей гидродинамики / А. В. Звягин, В. Г. Звягин, Д. М. Поляков // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. – 2016. – № 2. – С. 72–93.

31. Звягин В. Г., Звягин А. В., Поляков Д. М. О диссипативной разрешимости альфа–модели движения жидкости с памятью / В. Г. Звягин, А. В. Звягин, Д. М. Поляков // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2019. – Т. 59. – С. 1243–1257.

32. Звягин В. Г. Математические вопросы гидродинамики вязкоупругих сред / В. Г. Звягин, М. В. Турбин. – М.: УРСС: КРАСАНД, 2012. – 416 с.

33. Звягин В. Г., Звягин А. В., Турбин М. В. Об одном варианте аппроксимационно–топологического метода исследования слабой разрешимости системы Навье–Стокса / В. Г. Звягин, А. В. Звягин, М. В. Турбин // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. – 2017. – Т. 3. – С. 104–124.

34. Звягин В. Г., Звягин А. В., Турбин М. В. Вариант аппроксимационно–топологического метода исследования слабой разрешимости системы Навье–Стокса на основе параболической регуляризации / В. Г. Звягин, А. В. Звягин, М. В. Турбин // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. – 2017. – Т. 3. – С. 125–142.

35. Калантаров В. К. Об аттракторах для некоторых нелинейных задач математической физики / В. К. Калантаров // Записки научных семинаров ЛОМИ. – 1986. – Т. 152. – С. 50–54.

36. Красносельский М. А. Топологические методы в теории нелинейных: интегральных уравнений / М. А. Красносельский. – М. 1956.

37. Ладыженская О. А. О динамической системе, порождаемой уравнениями Навье–Стокса / О. А. Ладыженская // Записки научных семинаров ЛОМИ. – 1972. – Т. 27. – С. 91–115.

38. Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости / О. А. Ладыженская. – М.: Наука, 1970. – 288 с.

39. Ладыженская О. А. О нахождении минимальных глобальных аттракторов для уравнений Навье–Стокса и других уравнений с частными производными / О. А. Ладыженская // Успехи математических наук. – 1987. – Т. 258. – С. 25–60.

40. Ладыженская О. А. О погрешностях в двух моих публикациях по уравнениям Навье–Стокса и их исправлениях / О. А. Ладыженская // Записки научных семинаров ПОМИ. – 2000. – Т. 271. – С. 151–155.

41. Лерэй Ж., Шаудер Ю. Топология и функциональные уравнения (Применение некоторых топологических методов к исследованию дифференциальных уравнений с частными производными) / Ж. Лерэй, Ю. Шаудер // Успехи математических наук. – 1946. – Т. 1. – С. 71–95.

42. Лионс Ж. Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Ж. Л. Лионс. – М.: Мир, 1972. – 587 с.

43. Литвинов В. Г. Движение нелинейно–вязкой жидкости / В. Г. Литвинов. – М.: Наука. 1982.

44. Лодж А. С. Эластичные жидкости / А. С. Лодж.– М.: Наука, 1969. – 464 с.

45. Огородников Е. Н., Радченко В. П., Яшагин Н. С. Реологические модели вязкоупругого тела с памятью и дифференциальные уравнения дробных осцилляторов / Е. Н. Огородников, В. П. Радченко, Н. С. Яшагин // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико–математические науки. – 2011. – Т. 22. – С. 255–268.

46. Осколков А. П. Об асимптотическом поведении решений некоторых систем с малым параметром, аппроксимирующих систему уравнении Навье–Стокса / А. П. Осколков // Тр. МИАН СССР. – 1973. – Т. 125. – С. 147–163.

47. Осколков А. П. О некоторых квазилинейных системах, встречающихся при изучении движения вязких жидкостей / А. П. Осколков // Записки научных семинаров ЛОМИ. – 1975. – Т. 52. – С. 128–157.

48. Осколков А. П. О построении характеристических функционалов для системы уравнений Навье–Стокса–Фойгта и ВВМ–уравнени / А. П. Осколков // Записки научных семинаров ЛОМИ. – 1977. – Т. 69. – С. 136–148.

49. Осколков А. П. К теории жидкостей Фойгта / А. П. Осколков // Записки научных семинаров ЛОМИ. – 1980. – Т. 96. – С. 233–236.

50. Осколков А. П., Шадиев Р. Д. Нелокальные проблемы теории уравнений движения жидкостей Кельвина–Фойгта / А. П. Осколков Р. Д. Шадиев // Записки научных семинаров ЛОМИ. – 1990. – Т. 185. – С. 111–124.

51. Осколков А. П. Nonlocal problems for equations of Kelvin–Voight fluids / А. П. Осколков // Записки научных семинаров ЛОМИ. – 1992. – Т. 197. – С. 120–158.

52. Павловский В. А. К вопросу о теоретическом описании слабых водных растворов полимеров / В. А. Павловский // ДАН СССР. – 1971. – Т. 200, № 4. – С. 809–812.

53. Пухначев В. В., Фроловская О. А. О модели Войткунского–Амфилохиева–Павловского движения водных растворов полимеров / В. В. Пухначев, О. А. Фроловская // Труды математического института им. В.А. Стеклова. – 2018. – Т. 300. – С. 176–189.

54. Пухначев В. В., Фроловская О. А., Петрова А. Г. Растворы полимеров и их математические модели / В. В. Пухначев, О. А. Фроловская, А. Г. Петрова // Известия ВУЗов. Северо–Кавказский регион. Естественные науки. – 2020. – Т. 2. – С. 84–93.

55. Ребиндер П. А. Физико–химическая механика / П. А. Ребиндер. – М.: Знание. 1958. – 64 с.

56. Садовский Б. Н. Предельно компактные и уплотняющие операторы / Б. Н. Садовский // Успехи математических наук. – 1972. – Т. 27, № 1. – С. 81–146.

57. Самко С. Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев.– Минск: Наука и техника, 1987.

58. Соковнин О. М. Гидродинамика движения частиц, капель и пузырей в неньютоновских жидкостях / О. М. Соковнин, Н. В. Загоскина, С. Н. Загоскин.– Новосибирск: Наука, 2019. – 216 с.

59. Сукачева Т. Г., Матвеева О. П. Об одномерной модели термоконвекции несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина–Фойгта ненулевого порядка / Т. Г. Сукачева, О. П. Матвеева // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико–математические науки. – 2010. – Т. 21. – С. 33–41.

60. Темам Р. Уравнения Навье–Стокса. Теория и численный анализ / Р. Темам. – М.: Мир, 1981. – 408 с.

61. Трусдел Л. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред / Л. Трусдел.– М.: Мир, 1975. – 592 с.

62. Филиппов А. Ф. О некоторых вопросах теории оптимального регулирования / А. Ф. Филиппов // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – 1959. – Т. 2. – С. 25–32.

63. Фурсиков А. В. Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения / А. В. Фурсиков. – Новосибирск: Научная книга (Университетская серия Т. 5), 1999. –352 с.

64. Aglio A., Orsina L. Nonlinear parabolic equations with natural growth conditions and L_1 data / A. Dall Aglio, L. Orsina // Nonlinear Analysis. – 1986. – V. 27. – P. 59–73.

65. Agmon S. On the eigenfunctions and on the eigenvalues of general elliptic boundary value problems / S. Agmon // Communications on Pure and Applied Mathematics. – 1962. – V. 15. – P. 119–147.

66. Agranovich Yu. Ya., Sobolevskii P. E. Motion of nonlinear visco–elastic fluid / Yu. Ya. Agranovich, P. E. Sobolevskii // Nonlinear Analysis. – 1998. – V. 32, № 6. – P. 755–760.

67. Antontsev S. N., de Oliveira H. B., Khompysh Kh. Kelvin–Voigt equations perturbed by anisotropic relaxation, diffusion and damping / S. N. Antontsev, H. B. de Oliveira, Kh. Khompysh // Mathematical Analysis and Applications. – 2019. – V. 473. – P. 1122–1154.

68. Antontsev S. N., Khompysh Kh. Kelvin–Voight equation with p–Laplacian and damping term: existence, uniqueness and blow–up / S. N. Antontsev, Kh. Khompysh // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2017. – V. 446. – P. 1255–1273.

69. Aubin J. P., Cellina A. Differential inclusions. Set valued maps and viability theory / J. P. Aubin, A. Cellina. – Springer–Verlag, Berlin, 1984.

70. Bagley R. L., Torvik P. J. A theoretical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity / R. L. Bagley, P. J. Torvik // Journal of Rheology. – 1983. – V. 27. – P. 201–210.

71. Barnes H. A., Townsend P., Walters K. Flow of non–Newtonian liquids under a varying pressure gradient / H. A. Barnes, P. Townsend, K. Walters // Nature. – 1969. – V. 224. – P. 585–587.

72. Berselli L. C., Bisconti L. On the structural stability of the Euler–Voigt and Navier–Stokes–Voigt models / L. C. Berselli, L. Bisconti // Nonlinear Analysis. – 2012. – V. 75. – P. 117–130.

73. Blanchard D., Guibe O. Existence of solution for a nonlinear system in thermoviscoelasticity / D. Blanchard, O. Guibe // Advances in Difference Equations. – 2000. – V. 5. – P. 1221–1252.

74. Blanchard D., Murat F. Renormalized solution for nonlinear parabolic problems with L_1 data, existence and uniqueness / D. Blanchard, F. Murat // Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A Mathematics. – 1997. – V. 127. – P. 1137–1152.

75. Blanchard D., Murat F., Redwane H. Existence and uniqueness of a renormalized solution for a fairly general class of nonlinear parabolic problems / D. Blanchard, F. Murat, H. Redwane // Journal of Differential Equations. – 2001. – V. 177. – P. 331–374.

76. Blanchard D., Redwane H. Renormalized solutions for a class of nonlinear parabolic evolution problems / D. Blanchard, H. Redwane // Journal de Mathematiques Pures et Appliquees. – 1998. – V. 77. – P. 117–151.

77. Bresch D., Lemoine J. Existence and uniqueness for fluids of second grade / D. Bresch, J. Lemoine // Mathematical Methods in the Applied Sciences. – 1998. – V. 8. – P. 737–748.

78. Burmistrova O. A., Meleshko S. V., Pukhnachev V. V. Exact solutions of boundary layer equations in polymer solutions / O. A. Burmistrova, S. V. Meleshko, V. V. Pukhnachev // Symmetry. – 2021. – V. 13. – P. 2101.

79. Cao C. On the Clark-α model of turbulence: global regularity and long-time dynamics / C. Cao, D. D. Holm, E. S. Titi // Journal of Turbulence. – 2005. – V. 6. – P. 1–11.

80. Cao C. Global well–posedness of the three-dimensional viscous and inviscid simplified Bardina turbulence models / Y. Cao, E. M. Lunasin, E. S. Titi // Communications in Mathematical Sciences. – 2006. – V. 4. – P. 823–884.

81. Chen S. Camassa–Holm equations as a closure model for turbulent channel and pipe flow / S. Chen, C. Foias, D. D. Holm, E. Olson, E. S. Titi, S. Wynne // Physical Review Letters. – 1998. – V. 81. – P. 5338–5341.

82. Chepyzhov V. V. Attractors for equations of mathematical physics / V. V. Chepyzhov, M. I. Vishik. – Providence. RI: AMS Colloquium Publications, 2002. – 363 p.

83. Cheskidov A. On Leray–α model of turbulence / A. Cheskidov, D. D. Holm, E. Olson, E. S. Titi // Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and physical sciences. – 2005. – V. 461. – P. 629–649.

84. Chirita S., Zampoli V. On the forward and backward in time problems in the Kelvin–Voigt thermoelastic materials / S. Chirita, V. Zampoli // Mechanics Research Communications. – 2015. – V. 68. – P. 25–30.

85. Cioranescu D. Weak and classical solutions of a family of second grade fluids / D. Cioranescu, V. Girault // International Journal of Non–Linear Mechanics. – 1997. – V. 32. – P. 317–335.

86. Cioranescu D., Ouazar E. H. Existence and uniqueness for fluids of second grade / D. Cioranescu, E. H. Ouazar // Nonlinear Partial Differential Equations and Their Applications. – 1984. – V. 6. – P. 178–197.

87. Climent B., Fernandez-Cara E. Some existence and uniqueness results for a time–dependent coupled problem of the Navier–Stokes kind / B. Climent, E. Fernandez-Cara // Mathematical Methods in the Applied Sciences. – 1998. – V. 8. – P. 603–622.

88. Coti Zelati M., Gal C. G. Singular limits of Voigt models in fluid dynamics / M. Coti Zelati, C. G. Gal // Journal of Mathematical Fluid Mechanics. – 2015. – V. 17. – P. 233–259.

89. Crippa G. Estimates and regularity results for the diPerna–Lions flow / G. Crippa, C. de Lellis // Journal fur die reine und angewandte Mathematik. – 2008. – V. 616. – P. 15–46.

90. Crippa G. The ordinary differential equation with non-Lipschitz vector fields / G. Crippa // Bollettino dell'Unione Matematica Italiana 9. – 2008. – V. 1, № 2. – P. 333–348.

91. De Rham G. Varietes differentiables / G. De Rham. – Hermann, Paris, 1960.

92. Diaz J. I., Rakotoson J. M., Schmidt P. G. A parabolic system involving a quadratic gradient term related to the Boussinesq approximation / J. I. Diaz, J. M. Rakotoson, P. G. Schmidt // Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales. Serie A. Matematicas. – 2007. – V. 101. – P. 113–118.

93. Di Blasio G. Linear parabolic evolution equations in L_p–spaces / G. Di Blasio // Annali di Matematica Pura ed Applicata . – 1984. – V. 138, № 4. – P. 55–104.

94. Di Blasio G. Maximal L_p regularity for nonautonomous parabolic equations in extrapolation spaces / G. Di Blasio // Journal of Evolution Equations. – 2006. – V. 6, № 2. – P. 229–245.

95. DiPerna R. J. Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces / R. J. DiPerna, P. L. Lions // Inventiones mathematicae. – 1989. – V. 98, № 1. – P. 511–547.

96. DiPerna R. J., Lions P. L. On the cauchy problem for Boltzmann equations: global existence and weak stability / R. J. DiPerna, P. L. Lions // Annals of Mathematics. – 1989. – V. 130. – P. 321–366.

97. DiPlinio F. Navier–Stokes–Voigt equations with memory in 3D lacking instantaneous kinematic viscosity / F. Di Plinio, A. Giorgini, V. Pata, R. Temam // Journal of Nonlinear Science. – 2018. – V. 28. – P. 653–686.

98. Dmitrienko V. T., Zvyagin V. G. The topological degree method for equations of the Navier–Stokes type / V. T. Dmitrienko, V. G. Zvyagin // Abstracts and Applied Analysis. – 1997. – V. 2. – P. 1–45.

99. Ebin D. G., Marsden J. Groups of diffeomorphisms and the motion of an incompressible fluid / D. G. Ebin, J. Marsden // Annals of Mathematics. – 1970. – V. 92. – P. 102–163.

100.Fichera G. Existence theorem in elasticity. Boundary value problems of elasticity with unilateral constraints / G. Fichera. – Encyclopedia of Physics: Handbuch der Physik, Vol. 6a/2, Springer-Verlag, Berlin. 1972.

101.Feireisl E. Global attractors for semilinear damped wave equations with supercritical exponent / E. Feireisl // Journal of Differential Equations. – 1995. – V. 116, № 2. – P. 431–447.

102.Feireisl E., Zuazua E. Global attractors for semilinear wave equations with locally distributed nonlinear damping and critical exponent / E. Feireisl, E. Zuazua // Communications in Partial Differential Equations. – 1993. – V. 18. – P. 1539–1555.

103.Foias C. The three dimensional viscous Camassa–Holm equations, and their relation to the Navier–Stokes equations and turbulence theory / C. Foias, D. D. Holm, E. S. Titi // Journal of Dynamics and Differential Equations. – 2002. – V. 14. – P. 1–35.

104.Fosdick R. L., Rajagopal K. R. Anomalous features in the model of «second order fluids» / R. L. Fosdick, K. R. Rajagopal // Archive for Rational Mechanics and Analysis. – 1979. – V. 70. – P. 145–152.

105.Frolovskaya O. A., Pukhnachev V. V. Analysis of the models of motion of aqueous solutions of polymers on the basis of their exact solutions / O. A. Frolovskaya, V. V. Pukhnachev // Polymers. – 2018. – V. 10. – P. 684.

106.Fu Z. Experimental investigation of polymer diffusion in the drag–reduced turbulent channel flow of in–homogeneous solution / Z. Fu, T. Otsuki, M. Motozawa, T. Kurosawa, B. Yu, Y. Kawaguchi // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2014. – V. 77. – P. 860–873.

107.Galdi G. P. Existence and uniqueness of classical solutions of the equations of motion for second–grade fluids / G. P. Galdi, M. Grobbelaar–Van Dalsen, N. Sauer // Archive for Rational Mechanics and Analysis. – 1993. – V. 124. – P. 221–237.

108.Gao H., Sun C. Random dynamics of the 3D stochastic Navier–Stokes–Voight equations / H. Gao, C. Sun // Nonlinear Analysis: Real World Applications. – 2012. – V. 13. – P. 1197–1205.

109.Garcia–Luengo J., Marin–Rubio P., Real J. Pullback attractors for three–dimensional non–autonomous Navier–Stokes–Voigt equations / J. Garcia–Luengo, P. Marin–Rubio, J. Real // Nonlinearity. – 2012. – V. 25, № 4. – P. 905–930.

110.Greco R., Marano G. C. On a homogeneous model of the non–compressible viscoelastic Kelvin–Voigt fluid of the non–zero order. / R. Greco, G. C. Marano // Journal of Vibration and Control. – 2015. – V. 21. – P. 260–274.

111.Guillope C. Existence results for the flow of viscoelastic fluids with a differential constitutive law / C. Guillope, J. C. Saut // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. – 1990. – V. 15, № 9. – P. 849–869.

112.Guillope C. Mathematical problems arising in differential models for viscoelastic fluids / C. Guillope, J. C. Saut // Mathematical topics in fluid mechanics / J. F. Rodrigues, A. Sequeira (eds). – Pitman Research Notes in Mathematics Series V. 274.: Longman Scientific and Technical, Harlow, 1992. – P. 64–92.

113.Gupta M. K., Metzner A. B., Hartnett J. P. Turbulent heat–transfer characteristics of viscoelastic fluids / M. K. Gupta, A. B. Metzner, J. P. Hartnett // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 1967. – V. 10. – P. 1211–1224.

114.Han W. J., Dong Y. Z., Choi H. J. Applications of water–soluble polymers in turbulent drag reduction / W. J. Han, Y. Z. Dong, H. J. Choi // Processes. – 2017. – V. 5. – P. 24.

115.Hecht M. W. Implementation of the LANS–alpha turbulence model in a primitive equation ocean model / M. W. Hecht, D. D. Holm, M. R. Petersen, B. A. Wingate // Journal of Computational Physics. – 2008. – V. 227. – P. 5691–5716.

116.Holm D. D. The LANS–α model for computing turbulence origins, results, and open problems / D. D. Holm, C. Jeffery, S. Kurien, D. Livescu, M. A. Taylor, B. A. Wingate // Los Alamos Science. – 2005. – V. 29. – P. 152–172.

117.Holm D. D., Marsden J. E., Ratiu T. S. The Euler–Poincare models of ideal fluids with nonlinear dispersion / D. D. Holm, J. E. Marsden, T. S. Ratiu // Physical Review Letters. – 1998. – V. 349. – P. 4173–4177.

118.Holm D. D., Marsden J. E., Ratiu T. S. The Euler–Poincare Equations and semidirect products with applications to continuum theories / D. D. Holm, J. E. Marsden, T. S. Ratiu // Advances in Mathematics. – 1998. – V. 137. – P. 1–81.

119.Kamenskii M. Condensing multivalued maps and semilinear differential inclusions in Banach spaces / M. Kamenskii, V. Obukhovskii, P. Zecca. – De Gruyter Series In Nonlinear Analysis and Applications V. 7. Walter de Gruyter, 2001. – 231 p.

120.Ilyin A. A. A modified Leray–α subgrid scale model of turbulence / A. A. Ilyin, E. Lunashin, E. S. Titi // Nonlinearity. – 2006. – V. 19. – P. 879–897.

121.Kalantarov V. K., Levant B., Titi E. S. Gevrey regularity for the attractor of the 3D Navier–Stokes–Voight equations / V. K. Kalantarov, B. Levant, E. S. Titi // Journal of Nonlinear Science. – 2009. – V. 19. – P. 133–152.

122.Kalantarov V. K., Titi E. S. Global attractors and determining modes for the 3D Navier–Stokes–Voight equations / V. K. Kalantarov, E. S. Titi // Chinese Annals of Mathematics. Series B. – 2009. – V. 30, № 6. – P. 697–714.

123.Kilbas A. A. Theory and applications of fractional differential equations / A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo. – Elsevier. North–Holland Mathematics Studies. V. 204, 2006.

124.Larios A., Titi E. S. On the higher–order global regularity of the inviscid Voigt–regularization of three–dimensional hydrodynamic models / A. Larios, E. S. Titi // Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series B. – 2010. – V. 14. – P. 603–627.

125.Layton W. J., Rebholz L. G. On relaxation times in the Navier–Stokes–Voigt model / W. J. Layton, L. G. Rebholz // International Journal of Computational Fluid Dynamics. – 2013. – V. 27, № 3. – P. 184–187.

126.Lemarie–Rieusset P. G. The Navier–Stokes Problem in the 21st Century / P. G. Lemarie–Rieusset. – Taylor and Francis Group, 2016.

127.Leray J. Etude de diverses equations integrales nonlineaires et de quelques problemes que pose l'hydrodynamique / J. Leray // Journal de Mathématiques Pures et Appliquées – 1933. – V. 12. – P. 1–82.

128.Le Roux C. Existence and uniqueness of the flow of second–grade fluids with slip boundary conditions / C. Le Roux // Archive for Rational Mechanics and Analysis. – 1999. – V. 148. – P. 309–356.

129.Lions P. L. Global solutions for some Oldroyd models of non–Newtonian flows / P. L. Lions, N. Masmoudi // Chinese Annals of Mathematics. Series B. – 2000. – V. 21, № 2. – P. 131–146.

130.Litvinov W. G. Model for laminar and turbulent flows of viscous and nonlinear viscous non–Newtonian fluids / W. G. Litvinov // Journal of Mathematical Physics. – 2011. – V. 52. – P. 053102.

131.Mainardi F., Spada G. Creep, relaxation and viscosity properties for basic fractional models in rheology / F. Mainardi, G. Spada // The European Physical Journal Special Topics. – 2011. – V. 193. – P. 133–160.

132.Malek J. Weak and measure-valued solutions to evolutionary PDEs / J. Malek, J. Necas, M. Rokyta, M. Ruhicka. – Chapman and Hall, London, 1996.

133.Obukhovskii V. V. Optimal feedback control in the problem of the motion of a viscoelastic fluid / V. V. Obukhovskii, P. Zecca, V. G. Zvyagin // Topological Methods in Nonlinear Analysis – 2004. – V. 23. – P. 323–337.

134.Oldroyd J. G. On the formulation of rheological equations of state / J. G. Oldroyd // Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences. – 1950. – V. 200, № 1063. – P. 523–541.

135.Orlov V. P. On mathematical models of a viscoelasticity with a memory / V. P. Orlov, P. E. Sobolevskii // Differential and Integral Equations. – 1991. – V. 4, № 1. – P. 103–115.

136.Pisolkar V. G. Effect of drag reducing additives on pressure loss across transitions / V. G. Pisolkar // Nature. – 1970. – V. 225. – P. 936–937.

137.Qin Y., Yang X., Liu X. Averaging of a 3D Navier–Stokes–Voigt equation with singularly oscillating forces / Y. Qin, X. Yang, X. Liu // Nonlinear Analysis: Real World Applications. – 2012. – V. 13. – P. 893–904.

138.Rajagopal K. R., Na T. Y., Gupta A. S. Flow of a viscoelastic fluid over a stretching sheet / K. R. Rajagopal, T. Y. Na, A. S. Gupta // Rheologica Acta. – 1984. – V. 23, № 2. – P. 213–215.

139.Renardy M. Mathematical analysis of viscoelastic flows / M. Renardy // Annual Review of Fluid Mechanics. – 1989. – V. 21, № 1. – P. 21–36.

140.Rivlin R. S., Ericksen J.L. Stress deformation relations for isotropic materials / R. S. Rivlin, J. L. Ericksen // Archive for Rational Mechanics and Analysis. – 1955. – V. 4. – P. 323–425.

141.Sadicoff B. L., Brandao E. M., Lucas E. F. Rheological behaviour of poly (Acrylamide–G–propylene oxide) solutions: effect of hydrophobic content, temperature and salt addition / B. L. Sadicoff, E. M. Brandao, E. F. Lucas // International Journal of Polymeric Materials. – 2000. – V. 47. – P. 399–406.

142.Scott Blair G. W. A survey of general and applied rheology / G. W. Scott Blair. – London: Sir Isaac Pitman and Sons, 1949. – 314 p.

143.Sell G. R. Dynamics of Evolutionary Equations / G. R. Sell, Y. You. – New York: Springer, 1998. – 670 p.

144.Simon J. Compact sets in the space $L^p(0,T;B)$ / J. Simon // Annali di Matematica Pura ed Applicata. – 1987. – V. 146. – P. 65–96.

145.Tani A., Le Roux C. Steady–state solutions to the equations of motion of second–grade fluids with general Navier–type slip boundary conditions in Hölder spaces / A. Tani, C. Le Roux // Journal of Mathematical Sciences. – 2005. – V. 130. – P. 4899–4909.

146.Toms B. A. Some observations on the flow of linear polymer solutions through straight tubes at large Reynolds number / B. A. Toms // Proceedings of the First International Congress on Rheology. Amsterdam. – 1948. – V. 2. – P. 135–141.

147.Vorotnikov D. A Asymptotic behaviour of the non–autonomous 3D Navier–Stokes problem with coercive force / D. A. Vorotnikov// Journal of Differential Equations. – 2011. – V. 251. – P. 2209–2225.

148.Vorotnikov D. A. Global generalized solutions for Maxwell–alpha and Euler–alpha equations / D. A. Vorotnikov // Nonlinearity. – 2012. – V. 25. – P. 309–327.

149.Zhao C., Zhu H. Upper bound of decay rate for solutions to the Navier–Stokes–Voigt equations in $\mathbb{R}^3$ / C. Zhao, H. Zhu // Applied Mathematics and Computation. – 2015. – V. 256. – P. 183–191.

150.Zvyagin V. G. Approximating topological approach to the existence of attractors in fluid mechanics / V. G. Zvyagin, S. K. Kondratyev // Journal of Fixed Point Theory and Applications. – 2013. – V. 13, № 2. – P. 359–395.

151.Zvyagin V. G. Solvability of a parabolic problem with non–smooth data / V. G. Zvyagin, V. P. Orlov // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2017. – V. 453, № 1. –P. 589–606.

152.Zvyagin V. Weak solvability of fractional Voigt model of viscoelasticity / V. Zvyagin, V. Orlov // Discrete and Continuous Dynamical Systems. – 2018. – V. 38. – P. 6327–6350.

153.Zvyagin V. G. Weak solutions and attractors for motion equations for an objective model of viscoelastic medium / V. G. Zvyagin, D. A. Vorotnikov //

Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics. – 2007. – № 7. – P. 1060105–1060106.

154.Zvyagin V. G. Approximating–topological methods in some problems of hydrodinamics / V. G. Zvyagin, D. A. Vorotnikov // Journal of Fixed Point Theory and Applications. – 2008. – V. 3, № 1. – P. 23–49.

155.Zvyagin V. G. Topological approximation methods for evolutionary problems of nonlinear hydrodynamics / V. G. Zvyagin, D. A. Vorotnikov. – De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications V. 12. Walter de Gruyter, 2008. – 230 p.

156.Zvyagin V. Optimal feedback control problem for the fractional Voigt–α model / V. Zvyagin, A. Zvyagin, A. Ustiuzhaninova // Mathematics. – 2020. – V. 8. – P. 1197.

Публикации автора по теме диссертации

157.Zvyagin A. V. Solvability for equations of motion of weak aqueous polymer solutions with objective derivative / A. V. Zvyagin // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. – 2013. – V. 90. – P. 70–85.

158.Zvyagin V., Obukhovskii V., Zvyagin A. On inclusions with multivalued operators and their applications to some optimization problems / V. Zvyagin, V. Obukhovskii, A. Zvyagin // Journal of Fixed Point Theory and Applications. – 2014. – V. 16. – P. 27–82.

159.Звягин А. В., Орлов В. П. Исследование разрешимости задачи термовязкоупругости для линейно упруго–запаздывающей жидкости Фойгта / А. В. Звягин, В. П. Орлов // Математические Заметки. – 2015. – Т. 97, № 5. – С. 681–698.
Translation into English: Zvyagin A. V., Orlov V. P. Solvability of the thermoviscoelasticity problem for linearly elastically retarded Voiht liquids / A. V. Zvyagin, V. P. Orlov // Mathematical Notes. – 2015. – V. 97, №. 5. – P. 694–708.

160.Звягин А. В. Оптимальное управление с обратной связью для термовязкоупругой модели движения жидкости Фойгта / А. В. Звягин // Доклады Академии Наук. – 2016. – Т. 468, № 3. – С. 251–253.
Translation into English: Zvyagin A. V. Optimal feedback control for a thermoviscoelastic model of Voigt fluid motion / A. V. Zvyagin // Doklady Mathematics. – 2016. – V. 93, №. 3. – P. 270–272.

161.Звягин В. Г., Звягин А. В. Pullback–аттракторы модели движения растворов полимеров с реологическим соотношением, удовлетворяющим принципу объективности / В. Г. Звягин,А. В. Звягин // Фундаментальная и прикладная математика. – 2016. – Т. 21, № 5. – С. 129–157.
Translation into English: Zvyagin V. G., Zvyagin A. V. Pullback attractors for a model of polymer solutions motion with rheological relation satisfying the objectivity principle / V. G. Zvyagin, A. V. Zvyagin // Journal of Mathematical Sciences. – 2020. – V. 248. – P. 600–620.

162.Звягин А. В. Разрешимость задачи термовязкоупругости для альфа–модели Лере / А. В. Звягин // Известия ВУЗов. Математика. – 2016. – № 10. – С. 70–75.

Translation into English: Zvyagin A. V. Solvability of thermoviscoelastic problem for Leray alpha–model / A. V. Zvyagin // Russian Mathematics. – 2016. – V. 60, №. 10. – P. 59–63.

163.Звягин А. В., Звягин В. Г. Pullback–аттракторы модели движения слабо концентрированных водных растворов полимеров с реологическим соотношением, удовлетворяющим принципу объективности / А. В. Звягин, В. Г. Звягин // Доклады Академии Наук. – 2017. – Т. 474, № 5. – С. 531–534.
Translation into English: Zvyagin A. V., Zvyagin V. G. Pullback attractors for a model of weakly concentrated aqueous polymer solution motion with a rheological relation satisfying the objectivity principle / A. V. Zvyagin, V. G. Zvyagin // Doklady Mathematics. – 2017. – V. 95, №. 3. – P. 247–249.

164.Звягин А. В. Исследование разрешимости термовязкоупругой модели, описывающей движение слабо концентрированных водных растворов полимеров / А. В. Звягин // Сибирский математический журнал. – 2018. – Т. 59, № 5. – С. 1066–1085.
Translation into English: Zvyagin A. V. Study of solvability of a thermoviscoelastic model describing the motion of weakly concentrated water solutions of polymers / A. V. Zvyagin // Siberian Mathematical Journal. – 2018. – V. 59, №. 5. – P. 843–859.

165.Звягин А. В. Слабая разрешимость термовязкоупругой модели Кельвина–Фойгта / А. В. Звягин // Известия ВУЗов. Математика. – 2018. – № 3. – С. 91–95.
Translation into English: Zvyagin A. V. Weak solvability of Kelvin–Voigt model of thermoviscoelasticity / A. V. Zvyagin // Russian Mathematics. – 2018. – V. 62, №. 3. – P. 79–83.

166.Zvyagin A. V. Solvability of one class of thermo–visco–elastic–models / A. V. Zvyagin // AIP Conference Proceedings. – 2018. – V. 1997. – P. 020078-1–020078-5.

167.Zvyagin A. V. Attractors for model of polymer solutions motion / A. V. Zvyagin // Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series A. – 2018. – V. 28, № 12. – P. 6305–6325.

168.Звягин А. В. Исследование разрешимости термовязкоупругой модели движения растворов полимеров, удовлетворяющей принципу объективности

/ А. В. Звягин // Математические Заметки. – 2019. – Т. 105. – С. 839–856.
Translation into English: Zvyagin A. V. Solvability of thermoviscoelastic model of the motion of solutions of polymers satisfying the objectivity principle / A. V. Zvyagin // Mathematical Notes. – 2019. – V. 105, №. 6. – P. 831–845.

169.Звягин А. В. Оптимальное управление с обратной связью для альфа–модели Лере и альфа–модели Навье–Стокса / А. В. Звягин // Доклады Академии Наук. – 2019. – Т. 486, № 5. – С. 527–530.
Translation into English: Zvyagin A. V. Optimal feedback control for Leray and Navier–Stokes alpha models / A. V. Zvyagin // Doklady Mathematics. – 2019. – V. 99, №. 3. – P. 299–302.

170.Звягин А. В. О слабой разрешимости и сходимости решений дробной альфа–модели Фойгта движения вязкоупругой среды / А. В. Звягин // Успехи математических наук. – 2019. – Т. 74, № 3. – С. 189–190.
Translation into English: Zvyagin A. V. Weak solvability and convergence of solutions for the fractional Voigt-α model of a viscoelastic medium / A. V. Zvyagin // Russian Mathematical Surveys. – 2019. – V. 74, №. 3. – P. 549–551.

171.Звягин А. В. Альфа-модель Навье-Стокса с вязкостью, зависящей от температуры / А. В. Звягин // Доклады Академии Наук. Математика, Информатика, Процессы Управления. – 2020. – Т. 491, № 1. – С. 53–56.
Translation into English: Zvyagin A. V. Navier–Stokes–alpha model with temperature–dependent viscosity / A. V. Zvyagin // Doklady Mathematics. – 2020. – V. 101, №. 2. – P. 122–125.

172.Звягин А. В. Альфа–модель движения растворов полимеров / А. В. Звягин // Известия ВУЗов. Математика. – 2021. – № 5. – С. 33–42.
Translation into English: Zvyagin A. V. An alpha–model of polymer solutions motion / A. V. Zvyagin // Russian Mathematics. – 2021. – V. 65, №. 5. – P. 21–29.

173.Звягин А. В. Исследование слабой разрешимости дробной альфа–модели Фойгта / А. В. Звягин // Известия Академии Наук. Серия математическая. – 2021. – Т. 85, № 1. – С. 66–97.
Translation into English: Zvyagin A. V. Investigation of the weak solubility of the fractional Voigt alpha–model / A. V. Zvyagin // Izvestiya: Mathematics. – 2021. – V. 85, №. 1. – P. 61–91.