В.Н.БЕРЕСТОВСКИЙ. ВЛОЖЕНИЕ РЕШЕТОК В $L^2([0,1],\mathbb{Z})$.

Рассказывается о совместной статье докладчика и Конрада Плаута, опубликованной в Journal of Geometry, 75(2002), 27–45. DOI 10.1007/s00022-002-1619-1.

Аддитивная группа $L^2([0,1],\mathbb{Z})$ строится с использованием любой бесконечной последовательности матриц Адамара. Эта конструкция хорошо согласуется с классическими функциями Хаара и Радемахера. В статье доказано, что каждая n-мерная евклидова решетка изометрически изоморфна некоторому n-сечению в $L^2([0,1],\mathbb{Z})$, т.е. пересечению некоторого n-мерного евклидова подпространства в $L^2([0,1],\mathbb{R})$ с $L^2([0,1],\mathbb{Z})$ (решение гипотезы В.М.Гичева). Верны аналогичные теоремы вложения целочисленных и p-рациональных решеток в $\mathbb{Z}$-модуль всех непрерывных целочисленных функций на компактной аддитивной группе $\mathbb{Z}_p$ целых p-адических чисел с мерой Хаара; в доказательстве используется и теорема Лагранжа о представимости каждого натурального числа в виде суммы четырех квадратов целых чисел. Справедливы некоторые результаты о самоподобиях. Так (согласно В.М.Гичеву) для любого натурального числа n, $G^2 = L^2([0,1],\mathbb{Z})$ — ортогональная прямая сумма $G_1^2 \oplus \cdots \oplus G_n^2$ замкнутых подгрупп G_k^2, $1 \leq k \leq n$, подобно изоморфных G^2 с коэффициентом $1/\sqrt{n}$.

Группа G^2 локально и глобально стягиваема. Замкнутая аддитивная подгруппа H (соответственно, $\mathcal{R}$) в $L^2([0,1],\mathbb{R})$, порожденная базисом Хаара (соответственно, функциями Радемахера) вполне несвязна, недискретна и ортогональна (соответственно, дискретна и ортогональна). "Ортогональна"("ортонормальна"): существуют ортогональные (ортонормальные) базисы Шаудера; $\mathcal{R} \subset H \subset G^2$.