Обобщение теоремы Якоби-Шаля

Белозеров Г. В.

Согласно теореме Якоби-Шаля касательные линии, проведенные к геодезической на n-осном эллипсоиде в евклидовом $\mathbb{R}^n$, касаются помимо этого эллипсоида еще $n-2$ софокусных с ним квадрик, общих для всех точек данной геодезической. Из этой теоремы следует интегрируемость геодезического потока на эллипсоиде.

В. А. Кибкало исследовал вопрос об интегрируемости геодезического потока на пересечении нескольких софокусных квадрик. Он доказал, что геодезический поток на пересечении $(n-2)$-х софокусных квадрик является вполне интегрируемой гамильтоновой системой.

Оказывается, результат останется верным, если рассмотреть геодезический поток на пересечении произвольного числа невырожденных софокусных квадрик.

Теорема 1 (Белозеров). Пусть $Q_1, \ldots, Q_k$ — невырожденные софокусные квадрики различных типов в $\mathbb{R}^n$ и $Q = \bigcap\limits_{i=1}^{k} Q_i$, тогда

1. геодезический поток на Q квадратично интегрируем;
2. касательные линии, проведенные ко всем точкам геодезической на Q, касаются помимо $Q_1, \ldots, Q_k$ еще $n-k-1$ квадрик софокусных с $Q_1, \ldots, Q_k$ и общих для всех точек этой геодезической.

Замечание. Геодезические на пересечении невырожденных софокусных квадрик, вообще говоря, не являются геодезическими на какой-либо из квадрик $Q_1, \ldots, Q_k$. Поэтому теорема 1 не является следствием классической теоремы Якоби-Шаля.

Согласно теореме 1 и результата В. В. Козлова об интегрируемых геодезических потоках на двумерных поверхностях связная компонента компактного пересечения $(n-2)$-х софокусных квадрик гомеоморфна либо тору $\mathbb{T}^2$, либо сфере S^2. Причем оба эти случая реализуются. Отметим, что этот результат был получен ранее В. А. Кибкало. Однако удается описать класс гомеоморфности любого компактного пересечения невырожденных софокусных квадрик. Оказывается, что любое такое пересечение гомеоморфно прямому произведению сфер.

Аналогично теореме 1 можно описать класс потенциалов V в $\mathbb{R}^n$, таких, что ограничение системы с потенциалом на любое пересечение софокусных квадрик оставалось бы вполне интегрируемым. В частности, потенциал Гука принадлежит этому классу.

Также оказалось, что классическую теорему Якоби-Шаля можно обобщить не только для евклидовых пространств, но также для пространств постоянной гауссовой кривизны.