

Построение правильных многоугольников минимальной секцией угла

С. Ф. Адлай

<https://SemjonAdlaj.com/>

Constructing regular polygons via minimal angle section

Semjon Adlaj

<https://SemjonAdlaj.com/>

Впервые 17-угольник был построен Гауссом в 1796 году. Им же, в работе [1], сформулировано необходимое и достаточное условие построения правильного многоугольника бисекцией угла (осуществимой циркулем).¹ В статье [3], 1837 года, Ванцелем была чётко доказана не только достаточность, но и необходимость выдвинутого Гауссом условия.²

В статье [2], 1988 года, Глисон сформулировал необходимое и достаточное условие построения правильного многоугольника, если наряду с бисекцией угла допустить его трисекцию. Он построил 7-угольник и 13-угольник и “оставил построение 19-угольника читателю!”³ В той же статье он указал, что построение 11-угольника потребует квинтисекцию угла.

Попытки фактического построения 11-угольника обсуждались на открытых сайтах, в частности с 2016 по 2023 гг. на сайтах “Constructing the 11-gon by splitting an angle in five” и “Simplifying a radical-trigonometric expression for the hendecagon angle”. Искомые выражения в радикалах применением алгоритма “Mathematica ToRadicals” оказались чрезвычайно громоздкими. Так на странице Wolfram MathWorld “Trigonometry Angles” (обновлённой 28 марта 2025 года) указан случай простого числа 23 как “очень трудный и требующий большого времени”. Однако дела с такими алгоритмами выражения алгебраических чисел в радикалах обстоят значительно хуже того, в чём готова признаться “Wolfram Alpha”, умалчивая объём выражений после признанных ею долгими вычислений.

На предстоящем докладе мы обсудим причины столь затянувшегося построения (даже после нынешнего распространения методов компьютерной алгебры) правильных многоугольников (с малым количеством сторон) минимальной секцией угла и узнаем, какие фундаментальные результаты теории чисел (и их усиления) требуются для осуществления конкретных построений.

Доклад посвящается светлой памяти Юрия Ивановича Мерзлякова (01.06.1940 - 23.01.1995).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. C. F. Gauss. *Disquisitiones Arithmeticae*. Yale University Press edition of 1966, New Haven and London. Translation from Latin language edition of 1870: *Disquisitiones Arithmeticae* edited by E. C. J. Schering. Translated by Arthur A. Clarke. Revised by William C. Waterhouse with the help of Cornelius Greither and A. W. Grootendorst. Available at <https://doi.org/10.1007/978-1-4939-7560-0>.
2. A. Gleason. Angle Trisection, the Heptagona, and the Triskaidecagon. *The American Mathematical Monthly*, Vol. 95, No. 3 (March, 1988): 185-194. Available at <https://www.jstor.org/stable/2323624>
3. L. Wantzel. Recherches sur les moyens de reconnaître si un Problème de Géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* (1837), 2: 366–372.

¹Здесь (и потом) линейка нам не понадобится.

²По-видимому, Ванцель уже был ознакомлен с (ещё неопубликованными в том же журнале) идеями Галуа.

³Именно такое построение (с заимствованным у него восклицательным знаком) было им предложено читателю.

Семён Франкович Адлай, научный сотрудник
Сектор теории устойчивости и механики управляемых систем
Отделение моделирования сложных физических и технических систем
Вычислительный центр им А.А. Дородницына РАН
Россия 119333, Москва, ул. Вавилова, д. 40

Semjon Adlaj, Scientific Researcher
Section of Stability Theory and Mechanics of Controlled Systems
Division of Complex Physical and Technical Systems Modeling
Dorodnicyn Computing Centre of the Russian Academy of Sciences
Russia 119333, Moscow, Vavilov Street 40.