15. Универсальные ядерные оценки для функции условной дисперсии в неоднородной многофакторной модели непараметрической регрессии

с.н.с., д.ф.-м.н. Ю.Ю. Линке, г.н.с., д.ф.-м.н. И.С. Борисов,
лаборатория прикладных обратных задач (Ц1.1)

Предложены новые универсальные ядерные оценки для функции условной дисперсии в неоднородной многофакторной модели непараметрической регрессии. При более общих условиях на регрессоры, чем известные ранее в этой задаче, доказана состоятельность, равномерная состоятельность и асимптотическая нормальность новых оценок.

Рассматривается многофакторная неоднородная модель непараметрической регрессии, когда наблюдения $X_1, \dots, X_n$, представимы в виде

$$X_i = f(\mathbf{z}_i) + \sigma(\mathbf{z}_i)\xi_i, \qquad i = 1, \dots, n, \tag{1}$$

где непрерывные скалярные функции $f(\mathbf{t})$ и $\sigma(\mathbf{t})$, $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^k$, неизвестны. Набор регрессоров $\{\mathbf{z}_i\}$ со значениями в $\mathbb{R}^k$ состоит из детерминированных или случайных величин и нам известен, ненаблюдаемые погрешности $\{\xi_i\}$ не зависят от набора регрессоров $\{\mathbf{z}_i\}$. Неоднородная модель регрессии (1) играет важную роль в непараметрической статистике и большое число работ посвящено оцениванию функции $\sigma(\mathbf{t})$ при тех или иных ограничениях на параметры модели. В частности, в известных нам работах относительно регрессоров либо предполагается, что они детерминированы и регулярным образом заполняют область задания функций, либо случайны и удовлетворяют той или иной форме слабой зависимости. Наша задача состоит в том, чтобы оценить функцию $\sigma(\mathbf{t})$ при более общих, чем известные ранее, и близких к необходимым условиях на регрессоры.

В нашем исследовании набор регрессоров представляет собой случайные величины в схеме серий, а в качестве параметра серии выступает объем наблюдений n. Последнее позволяет включить в рассмотрение модели с детерминированными регрессорами и в едином подходе рассматривать оба типа моделей. Предложены новые универсальные ядерные оценки для функции $\sigma(\mathbf{t})$ и доказаны асимптотические свойства этих оценок (состоятельность, равномерная состоятельность, асимптотическая нормальность), при этом относительно регрессоров требуется лишь, чтобы эти величины с высокой вероятностью асимптотически плотно (с ростом n) заполняли область определения функции $\sigma(\mathbf{t})$, в качестве которой рассматривается k-мерный куб $[0,1]^k$. А именно, предполагается, что с ростом n имеет место предельное соотношение $\max_{\mathbf{t}\in[0,1]^k} \inf_{1\le i\le n} \|\mathbf{t} - \mathbf{z}_i\| \xrightarrow{p} 0$, где $\|\cdot\|$ — супремальная норма в $\mathbb{R}^k$. Данное по существу необходимое для восстановления функции $\sigma(\mathbf{t})$ условие на регрессоры включает как случайные, так и детерминированные регрессоры, но без требования их слабой зависимости или регулярности. Подчеркнем, что предлагаемое простое и наглядное универсальное относительно стохастической природы условие на регрессоры в терминах плотных данных позволяют оценить интересующую нас функцию без использования информации о характере зависимости регрессоров, что может быть важным для практических приложений.

Особенностью предлагаемых универсальных ядерных оценок являются конструкции кратных интегральных сумм Римана в структуре этих оценок. Отмеченное обстоятельство открывает возможность исследовать эти оценки за счет близости интегральных сумм и соответствующих интегралов, а не предельных теорем теории вероятностей, и получать универсальные условия относительно природы регрессоров, не использующие характер их зависимости.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН, проект FWNF-2024-0001.

Результат опубликован в работах:

1. *Ю.Ю. Линке.* Универсальные ядерные оценки в неоднородной модели непараметрической регрессии // Математические заметки, **120**:5 (2026), 755–772. DOI:10.4213/mzm14985

2. *Y. Linke, I. Borisov.* Asymptotic properties of universal kernel estimators for heteroscedastic models // Statistics, (2026), published online. DOI:10.1080/02331888.2026.2766581

3. *Ю.Ю. Линке.* Универсальные локально–линейные оценки для функции условной дисперсии в неоднородной непараметрической регрессии // СЭМИ, **23**:2 (2026), 952–962. DOI:10.33048/semi.2026.23.058