17. О графах Кэли-Ноймайера

с.н.с., к.ф.-м.н. Г.К. Рябов,
лаборатория теории графов (К6);
в сотрудничестве с R. Evans, University of Sydney (Australia), S. Goryainov, Hebei Normal University (China), Da Zhao, East China University of Science and Technology (China)

Построена первая известная бесконечная серия вершинно-транзитивных точных графов Ноймайера неограниченного нексуса.

Граф Ноймайера — это реберно-регулярный граф, обладающий регулярной кликой. Понятие графа Ноймайера восходит к вопросу Ноймайера (1981) о существовании реберно-регулярного графа, обладающего регулярной кликой, но не являющегося сильно регулярным. Одной из мотиваций исследования графов Ноймайера является попытка поиска разумного расширения класса сильно регулярных графов. Отметим, что каждый вершинно- и реберно-транзитивный граф, содержащий регулярную клику, является сильно регулярным (Ноймайер, 1981). Первые примеры точных графов Ноймайера, т.е. графов Ноймайера, не являющихся сильно регулярными, были построены в статье Гривза и Кулена (2018). В дальнейшем различные конструкции и свойства графов Ноймайера были представлены в работах Абиад, Гривза, Кулена, Эванса, Горяинова, Константиновой, Медных, де Брюна и т.д. (2019-2026).

Отдельный интерес представляют вершинно-транзитивные графы Ноймайера, как наиболее близкие к сильно регулярным графам. Нексусом графа Ноймайера называется число соседей в регулярной клике у вершины, не лежащей в клике. Все известные ранее вершинно-транзитивные точные графы Ноймайера имеют нексус 1. В представленной работе дается положительный ответ на следующий вопрос.

Существует ли бесконечная серия вершинно-транзитивных точных графов Ноймайера неограниченного нексуса?

Более точно, доказывается

Теорема. Для каждого четного натурального числа n над каждой абелевой группой порядка 2^{2n+2}, обладающей элементарной абелевой подгруппой индекса 2, существует точный граф Кэли-Ноймайера с параметрами

$$(2^{2n+2}, (2^{n+1}-1)(2^n+1), 2(2^n-1)(2^{n-1}+1), 2^n, 2^{n+1}).$$

Конструкция точных графов Кэли-Ноймайера, построенная в работе, основана на использовании относительных разностных множеств. Кроме того, с помощью относительных разностных множеств в работе построены серии точных графов Кэли-Ноймайера нексуса 1 с новыми параметрами.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН, проект FWNF-2026-0011.

Результат опубликован в работе:

R. Evans, S. Goryainov, G. Ryabov, D. Zhao. On Neumaier Cayley graphs // Discrete Mathematics, **350**:2 (2027), art. no 115449. DOI:10.1016/j.disc.2026.115449