19. Эффективный метод построения квази-оптимального расписания выполнения работ в системе разно-скоростных параллельно-групповых машин с произвольно заданными множествами допустимых исполнителей работ

в.н.с., д.ф.-м.н. С.В. Севастьянов,
лаборатория исследования операций (К1)

Впервые для самого общего случая задачи выполнения независимых работ за минимальное время на разноскоростных p-групповых машинах с произвольными ограничениями на множество допустимых исполнителей каждой работы ("PSR-ограничениями") построен эффективный приближённый алгоритм с константной оценкой точности. (Ранее подобные результаты были известны лишь для весьма частных случаев PSR-ограничений.)

Рассматривается задача нахождения расписания для выполнения заданного множества *работ* $\{J_1, \ldots, J_n\}$ на множестве *машин* $\mathcal{M} = \{M_1, \ldots, M_m\}$ за наименьшее время. Для каждой работы J_j заданы её объём p_j и множество $\mathcal{M}_j \subseteq \mathcal{M}$ её допустимых исполнителей, из которых следует выбрать лишь одного. Совокупность подмножеств $\{\mathcal{M}_j \,|\, j \in [n]\}$ задаёт "PSR-ограничения". Кроме того, машины различаются своими *скоростями* $\{s_i \,|\, i \in [m]\}$; длительность $(\hat{p}_j)$ выполнения работы J_j зависит от выбора её машины-исполнителя $M_{\hat{i}(j)} \in \mathcal{M}_j$ и определяется по формуле: $\hat{p}_j = p_j / s_{\hat{i}(j)}$. Все машины являются *групповыми*, т.е. способными выполнять одновременно несколько работ; для каждой машины $M_i \in \mathcal{M}$ задано максимально допустимое число (B_i) работ в каждой её группе. "Одновременность" выполнения работ в группе $\tilde{\mathcal{J}}$ означает, что совокупность работ $\tilde{\mathcal{J}}$ рассматривается как ОДНА "агрегированная" работа, расписание выполнения которой (моменты начала и окончания) приписывается всем работам группы. При "параллельном" способе выполнения работ в каждой группе (что обозначается термином *p-batch*) длина агрегированной работы полагается равной длине максимальной работы в группе. Каждая машина выполняет свои группы работ последовательно, одну за другой. Требуется минимизировать момент завершения последней работы.

В силу NP-трудности данной задачи (кратко обозначаемой $\langle Q, p\text{-}batch\,(B_i) \,|\, \mathcal{M}_j \,|\, C_{\max}\rangle$) уже для очень частных её случаев, поиск эффективных алгоритмов её точного решения малоперспективен, поэтому значительная часть теоретических исследований направлена на поиск эффективных алгоритмов её **приближённого решения** (с гарантированными оценками точности). До сих пор таковые алгоритмы для данной задачи были известны лишь для весьма частных случаев PSR-ограничений (таких как *typed*, *inclusive*, *nested PSR*, и др.). Наиболее сильные результаты были получены в недавней работе [1], где для задач $\langle P, p\text{-}batch\,(B_i) \,|\, \mathcal{M}_j(nested) \,|\, C_{\max}\rangle$ (на равно-скоростных *p-batch* машинах с *nested PSR*) и $\langle Q, p\text{-}batch\,(B_i) \,|\, \mathcal{M}_j(intree) \,|\, C_{\max}\rangle$ (на разно-скоростных *p-batch* машинах с *intree-PSR*) построены полиномиальные алгоритмы их приближённого решения с оценкой относительной погрешности 2.

В нашей работе впервые подобный алгоритм построен для такой задачи с **произвольными PSR-ограничениями**. При этом наш алгоритм превосходит упомянутые выше алгоритмы (решающие частные случаи данной задачи) как по оценке точности $\left(\frac{C_{\max}(S)}{OPT} \leq 2 - \frac{1}{mB_{\max}}\right)$, так и по эффективности (*сильная полиномиальность* вместо обычной полиномиальности по-Тьюрингу).

[1] *X. Chai, W. Li, C.T. Ng, T.C.E. Cheng.* Approximation algorithms for batch scheduling with processing set restrictions // J. Sched. **26** (2023), 523–533. https://doi.org/10.1007/s10951-022-00720-2

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН, проект FWNF-2022-0019.

Результат опубликован в работе:

S. Sevastyanov. Efficient approximation algorithms for scheduling problems with uniform p-batch machines and arbitrary processing set restrictions // J. Sched. **29** (2026), 203–228.
DOI: 10.1007/s10951-025-00867-8