3. Сложность абелевых групп и критерий полиномиальной вычислимости структуры

в.н.с., д.ф.-м.н. П.Е. Алаев
Лаборатория теории вычислимости и прикладной логики (Л2)

Доказано, что любая вычислимая абелева группа изоморфна группе, вычислимой за линейное время. Исследование опирается на общий критерий, показывающий, когда у данной структуры есть изоморфное представление, вычислимое за полиномиальное время. Критерий формулируется в терминах сложности проблемы равенства термов от некоторой системы порождающих.

Задача поиска эффективного представления данной структуры $\mathcal{A}$ имеет достаточно давнюю историю. Теория вычислимых структур начала активно развиваться в 60-е годы XX века в работах А. И. Мальцева и М. Рабина. Вопрос о том, когда у структуры $\mathcal{A}$ есть вычислимое представление, является одной из центральных проблем этой теории. В развитие теории вычислимых структур решающий вклад внесли Ю. Л. Ершов, С. С. Гончаров и большое число других российских и зарубежных авторов. В частности, тут можно упомянуть сотрудников ИМ СО РАН А. С. Морозова, Н. Т. Когабаева, О. В. Кудинова, С. П. Одинцова, Д. Е. Пальчунова и др.

Структуры, вычислимые за полиномиальное время (коротко, P-вычислимые) являются частным случаем вычислимых структур. Дж. Реммел и Д. Цензер в 1991 году доказали, что любая вычислимая структура предикатной сигнатуры имеет P-вычислимое представление. В 1992 году они же доказали, что это верно и для периодических абелевых групп. П. Е. Алаев в 2016 году доказал общий факт, что любая вычислимая локально конечная структура обладает P-вычислимым представлением. В 2019 году П. Е. Алаев и В. Л. Селиванов доказали, что поле алгебраических комплексных чисел и упорядоченное поле вещественных алгебраических чисел обладают P-вычислимым представлением. В 1998 году Х. Фридман и Дж. Реммел сформулировали общий критерий того, что конечно порождённая структура обладает P-вычислимым представлением. Критерий, предложенный в данной работе, обобщает многие факты, ранее доказанные для ряда частных случаев, в том числе упомянутый выше критерий Фридмана – Реммела. В частности, он был использован при изучении вычислимых абелевых групп. В ходе этих исследований была доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Любая вычислимая абелева группа $\mathcal{A} = (A, +, -, 0)$ изоморфна группе $\mathcal{A}'$, вычислимой за линейное время.*

Зная, что у данной структуры есть P-вычислимое представление, мы можем найти такое представление и затем строить эффективные алгоритмы для решения различных задач внутри такой структуры. Важное приложение теории представлений структур это построение онтологий предметных областей. Они важны для создания систем ИИ, допускающих анализ их работы и объяснения принципов предсказаний. В случае, когда в сигнатуре нет предикатов, общий критерий P-вычислимости формулируется менее громоздко. Случай с предикатами требует более объёмной формулировки.

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{A}$ — структура конечной сигнатуры L без предикатов. Она изоморфна P-вычислимой структуре тогда и только тогда, когда существуют следующие объекты:*

1) последовательность $\{a_i\}_{i\geqslant 1}$, порождающая $\mathcal{A}$;

2) вычислимая функция $e : \omega \to \omega$;

3) машина Тьюринга T, которая получает на вход два терма $t_1(x_1, \dots, x_n)$, $t_2(x_1, \dots, x_n)$ сигнатуры L, где $n \geqslant 1$, и проверяет условие

$$\mathcal{A} \models t_1(a_1, \dots, a_n) = t_2(a_1, \dots, a_n)$$

за время $O\big(2^{2^{ch+e(n)}}\big)$, где c — константа и $h = \max\{h(t_1), h(t_2)\}$.

Здесь $h(t)$ это стандартная высота терма t. В термах переменная x_i заменяется на слово $[\mathrm{bin}(i)]$.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН, проект FWNF-2026-0032.

Результат опубликован в работе:

П.Е. Алаев. Сложность вычислимых абелевых групп // Алгебра и логика. (2026) Принята к печати.