6. О вопросе Камины и Камины: A-группы и мощности классов сопряжённости

инженер-исследователь В. Чжоу,
Аксиальные алгебры и связанные с ними группы (ММЦ, П2.7);
в сотрудничестве с И.Б. Горшковым, НГТУ, Hebei Normal University (Китай)

Доказана абелевость A-групп с множеством индексов как у нильпотентной группы.

Пусть G – конечная группа и $N(G)$ — множество мощностей ее классов сопряженности (множество индексов). Многие классические результаты описывают строение группы с ограничениями на $N(G)$. Например, Ито показал, что если $N(G) = \{1, n\}$, то G – прямое произведение p-группы и абелевой p'-группы [1].

Для нильпотентной группы множество $N(G)$ является произведением множеств степеней различных простых чисел, и по теореме Косси и Хоукса [2] любое такое произведение реализуется как множество индексов некоторой нильпотентной группы. Камина и Камина [3] спросили: если $N(G)$ совпадает с множеством индексов нильпотентной группы, должна ли G быть нильпотентной? В общем случае ответ отрицателен, однако для A-групп (групп, все силовские подгруппы которых абелевы) они предположили положительный ответ и доказали его для метабелевых групп.

В докладе будет дан полный положительный ответ на этот вопрос. Для простого p обозначим через $|G||_p$ наибольшую степень p, делящую некоторое число ииз $N(G)$, и положим $|G|| = \prod_{p\in\pi(G)} |G||_p$.

Теорема. *Пусть G – A-группа такая, что $N(G)$ содержит $|G||_p$ для всех $p \in \pi(G)$ и $|G||$. Тогда G – абелева группа.*

В частности, A-группа с тем же множеством индексов, что и у некоторой нильпотентной группы, абелева. Доказательство использует разрешимость таких групп, анализ подгруппы Фиттинга и второй подгруппы Фиттинга, а также существование регулярных орбит при взаимно простых действиях абелевых групп.

Работа выполнена при поддержке Математического центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации № 075–15–2025–348.

[1] N. Itô, On finite groups with given conjugate types I, *Nagoya Math. J.*, **6** (1953), 17–28.
[2] J. Cossey, T. Hawkes, Sets of p-powers as conjugacy class sizes, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **128**(1) (2000), 49–51.
[3] A. R. Camina, R. D. Camina, Recognising nilpotent groups, *J. Algebra*, **300**(1) (2006), 16–24.

Результат опубликован в работе:

Zhou, Wei; Gorshkov, Ilya On A-groups with the same index set as a nilpotent group.// J. Algebra **686**, 836-844 (2026), DOI: 10.1016/j.jalgebra.2025.09.003.