7. Спектры нормированных объемов прямоугольных гиперболических многогранников

директор, член-корреспондент РАН, д.ф.-м.н. А.Ю. Веснин, н.с. к.ф.-м.н. А.А. Егоров,
лаборатория динамических систем (Д6), лаборатория теории графов (К6)

Описаны дискретная и всюду плотная части спектров нормированных объемов компактных и идеальных прямоугольных многогранников в трехмерном пространстве Лобачевского.

Пусть трехмерный гиперболический многогранник $\mathcal{P}$ имеет конечный объем $\mathrm{vol}(\mathcal{P})$ и конечное число вершин $\mathrm{ver}(\mathcal{P})$. Его нормированным объемом будем называть величину $\omega(\mathcal{P}) = \mathrm{vol}(\mathcal{P})/\mathrm{ver}(\mathcal{P})$. Если $\mathcal{R}$ – некоторое множество гиперболических многогранников, то сопоставим ему множество нормированных объемов $\Omega(\mathcal{R}) = \{\omega(\mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \in \mathcal{R}\}$, которое будем называть спектром нормированных объемов множества $\mathcal{R}$. В докладе рассматриваются множество $\mathcal{R}_{comp}$ компактных прямоугольных гиперболических многогранников и множество $\mathcal{R}_{ideal}$ идеальных (все вершины бесконечно удаленные) прямоугольных гиперболических многогранников. Многогранник называется прямоугольным, если все его двугранные узлы равны $\pi/2$.

Мы доказываем, что спектр $\Omega(\mathcal{R}_{ideal})$ принадлежит интервалу $\left[\frac{1}{6}v_{\mathrm{oct}}, \frac{1}{2}v_{\mathrm{oct}}\right]$ и обе границы являются точными. Причем, спектр является дискретным в $\left[\frac{1}{6}v_{\mathrm{oct}}, \frac{1}{4}v_{\mathrm{oct}}\right)$ и всюду плотным в $\left[\frac{1}{4}v_{\mathrm{oct}}, \frac{1}{2}v_{\mathrm{oct}}\right]$, где $v_{\mathrm{oct}} = 8\Lambda(\pi/4) = 3,663762\ldots$ – объем правильного идеального гиперболического октаэдра выраженный через функцию Лобачевского

$$\Lambda(\theta) = -\int_0^\theta \ln|2\sin t|dt.$$

Также, мы устанавливаем, что спектр $\Omega(\mathcal{R}_{comp})$ принадлежит интервалу $\left[\frac{5}{192}v_{\mathrm{oct}}, \frac{5}{8}v_{\mathrm{tet}}\right]$ и верхняя граница является точной. Причем, на интервале $\left[\frac{5}{192}v_{\mathrm{oct}}, \frac{1}{32}v_{\mathrm{oct}}\right)$ спектр является дискретным, а на интервале $\left[\frac{5}{16}v_{\mathrm{tet}}, \frac{5}{8}v_{\mathrm{tet}}\right]$ – всюду плотным, где $v_{\mathrm{tet}} = 3\Lambda(\pi/3) = 1,014941\ldots$ – объем правильного идеального гиперболического тетраэдра. Вопрос о поведении спектра $\Omega(\mathcal{R}_{comp})$ на интервале $\left[\frac{1}{32}v_{\mathrm{oct}}, \frac{5}{16}v_{\mathrm{tet}}\right]$ является открытым.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН, а именно А.Ю. Веснин поддержан проектом FWNF-2026-0031, А.А. Егоров – проектом FWNF-2026-0011.

Результат опубликован в работе:

А.Ю. Веснин, А.А. Егоров. Спектры нормированных объемов прямоугольных гиперболических многогранников // Сибирский математический журнал, **67**:4 (2026), С 581–602.
DOI: 10.33048/smzh.2026.67.402