Важнейшие научные результаты ИМ СО РАН
за 2015 год

1.1.1. Алгебра, теория чисел, математическая логика

1. **Предложен метод вычисления сепарантов для многочленов** (г.н.с. - советник РАН, академик Ю.Л. Ершов)

С произвольным многочленом от одной переменной над нормированным полем связывается константа из пополнения группы нормирования, называемая сепарантом, которая позволяет установить точную форму леммы Гензеля. Найти сепарант можно, используя каноническое разложение многочлена и вычисляя подходящие кратные результанты.

Сепарант произвольного многочлена, Алгебра и логика, 2014, Т. 53, No. 6, 704-709.
Как находить (вычислять) сепарант, Алгебра и логика, 2015, Т. 54, No. 2, 236-242.

2. **Доказано, что конечная группа, изоспектральная конечной простой группе L лиева типа достаточно большого лиева ранга, является почти простой группой с цоколем, изоморфным L** (г.н.с., д.ф.-м.н. Васильев А.В., с.н.с., д.ф.-м.н. Гречкосеева М.А., н.с., к.ф.-м.н. Старолетов А.М.)

Группы называются изоспектральными, если они имеют одинаковые множества порядков элементов. Известно, что множество конечных групп, изоспектральных группе с нетривиальной нормальной разрешимой подгруппой, бесконечно. С другой стороны, существовала гипотеза о том, что множество конечных групп, изоспектральных «достаточно большой» неабелевой простой группе L, конечно и состоит из групп G, удовлетворяющих условию $L\leq G\leq Aut(L)$. Мы завершаем изучение этой гипотезы и доказываем, что она верна со следующим точным значением выражения «достаточно большая»: L - спорадическая, знакопеременная или исключительная группа лиева типа, отличная от J_2, A_6, A_{10}, $^3D_4(2)$, или L - классическая группа, размерность которой больше 60.

M.A. Grechkoseeva, A.V. Vasil'ev. On the structure of finite groups isospectral to finite simple groups // J. Group Theory, 18, 741-759, 2015.
A.V. Vasil'ev, On finite groups isospectral to simple classical groups // J. Algebra, 423, 318-374, 2015.
А.В. Васильев, А.М. Старолетов, Почти распознаваемость простых исключительных групп лиева типа // Алгебра и логика, 53, 669--692, 2014.

3. **Доказан аналог теоремы Гильберта о нулях в алгебраической геометрии над жёсткими разрешимыми группами** (г.н.с., д.ф.-м.н., профессор Романовский Н.С.)

Классическая теорема Гильберта о нулях говорит о том, что если K – алгебраически замкнутое поле и имеется система полиномиальных над K уравнений $f_1=0, \dots ,f_n=0$, то уравнение $f=0$ является её следствием в том и только том случае, когда многочлен f в некоторой ненулевой степени принадлежит идеалу (в кольце многочленов), порождённому $f_1, \dots ,f_n$. Можно сказать, что даётся алгебраический способ построения всех следствий данной системы уравнений: f получается из $f_1, \dots ,f_n$ при помощи операций сложения, вычитания, умножения на произвольные полиномы и извлечения корней.
Мы указываем подход к формулировке теоремы Гильберта о нулях в алгебраической геометрии над достаточно хорошими классами групп и доказываем соответствующее утверждение в классе жёстких разрешимых групп.

Н.С.Романовский, Теорема Гильберта о нулях (Nullstellensatz) в алгебраической геометрии над жёсткими разрешимыми группами, Известия РАН (серия математическая), 79, № 5 (2015), 201-214.

4. **Описаны распределения счетных моделей полных теорий с континуальным числом типов** (в.н.с., д.ф.-м.н., доцент Судоплатов С.В., совместно с Р.А. Попковым (ассистент кафедры алгебры и математической логики НГТУ)

Для произвольной теории T из класса T_c счетных полных теорий с континуальным числом типов, в предположении континуум-гипотезы, описаны распределения счетных моделей относительно следующих характеристик:
1) число P(T) простых, над конечными множествами, моделей теории T, а также предпорядок Рудин-Кейслера на типах изоморфизма таких моделей;
2) число L(T) предельных моделей теории T, а также функция распределения числа предельных моделей относительно последовательностей типов;
3) число NPL(T) остальных счетных моделей теории T.
Доказана следующая теорема, описывающая тройки $cm_3(T)=(P(T),L(T),NPL(T))$ распределения числа счетных моделей теорий T.
Теорема. В предположении континуум-гипотезы, для любой теории T из класса T_c тройка $cm_3(T)$ принимает одно из следующих значений:
1) $(2^\omega, 2^\omega, \lambda)$, где λ – конечный, счетный или континуальный кардинал;
2) $(0, 0, 2^\omega)$;
3) $(\lambda_1, \lambda_2, 2^\omega)$, где λ_1, λ_2 - конечные, счетные или континуальные кардиналы, $\lambda_1>0$.
Все указанные значения имеют реализации в классе T_c.
В приведенной теореме вместо континуум-гипотезы достаточно потребовать выполнение гипотезы Воота.

Popkov R.A., Sudoplatov S.V. Distributions of countable models of complete theories with continuum many types // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2015. Vol. 12. P. 267-291. http://dx.doi.org/10.17377/semi.2015.12.022

5. **Введены универсальные инварианты, канонические группы и генерические теории для классов абелевых групп. Это позволило классифицировать универсальные классы абелевых групп и описать экзистенциальено замкнутые группы в универсальных классах (**с.н.с., к.ф.-м.н. А.А. Мищенко, зав. лаб., д.ф.-м.н. В.Н. Ремесленников, с.н.с., к.ф.-м.н. А.В. Трейер)

В середине прошлого столетия В.Шмелева доказала критерий об элеменарной эквивалентности абелевых групп: две абелевы группы являются элементарно эквивалентными тогда и только тогда, когда совпадают значения так называемых элементарных инвариантов для этих групп. Этот результат являлся одним из первых в теории моделей по элементарной эквивалентности теорий алгебраических систем и оказал большое влияние на развитие теории моделей и теории абелевых групп. Исполнители проекта А.А. Мищенко, В.Н. Ремесленников и А.В. Трейер ввели понятие серии универсальных инвариантов для абелевых групп и универсальных классов абелевых групп, и на языке этих инвариантов получили критерий, схожий по формулировке с критерием В.Шмелевой, об универсальной эквивалентности абелевых групп и классов абелевых групп. Также для универсальных классов абелевых групп построены канонические группы и описаны классы экзистенциально замкнутых групп. Работа «Канонические и экзистенциальные группы для универсальных классов абелевых групп» принята к печати в журнале «Доклады академии наук». Современные математические модели: роста интернета, социальных связей, компьютерной безопасности — это большие случайные графы, и, кроме того, это динамические модели, зависящие от времени. В стандартных теоретико-графовых терминах их невозможно описать и исследовать. Однако если множество моделей хорошо алгоритмически определено, то в таких множествах присутствуют общие закономерности, присущие "почти" всем моделям сообщества. Эти общие закономерности для хорошо определённых систем поддаются исследованиям статистическими и теоретико-модельными методами. С точки зрения теоретико-модельных методов мы приходим к понятию генерической теории для фиксированного множества моделей.

Мясников А.Г., Ремесленников В.Н.. Генерические теории как метод аппроксимации элементарных теорий // Алгебра и логика 53(6), 401-409, 2014.
Мищенко А.А., Ремесленников В.Н., Трейер А.В. Генерические теории для конечных абелевых групп // Алгебра и логика 53(6), 375-389 2014.
Мищенко А.А., Ремесленников В.Н., Трейер А.В. Канонические и экзистенциальные группы для универсальных классов абелевых групп // Представлена академиком Ю.Л. Ершовым в журнал «Доклады академии наук» в июле 2015 года.

6. **Доказана специальность йордановых супералгебр, соответствующих алгебрам Новикова-Пуассон**а (г.н.с., д.ф.-м.н. Желябин В.Н., инженер Захаров А.С.)

В теории йордановых супералгебр важным свойством является специальность супералгебры, то есть возможность ее вложения в градуированную ассоциативную обёртывающую алгебру с операцией суперкоммутатора. Йордановы супералгебры, построенные по алгебрам Новикова-Пуассона векторного типа, являются йордановыми супералгербами векторного типа, а потому специальными. По произвольной алгебре Новикова-Пуассона была построена (-1,1)-супералгебра. С помощью этой конструкции доказана специальность йордановых супералгебр, соответствующих алгебрам Новикова-Пуассона, в общем случае.

В. Н. Желябин, А. С. Захаров. Специальность йордановых супералгебр, связанных с алгебрами Новикова–Пуассона // Матем. заметки, 97:3 (2015), 359–367

7. **Доказана теорема о свободе для общих алгебр Пуассона** (зав.лаб., д.ф.-м.н. Колесников П.С., г.н.с., д.ф..-м.н., профессор Шестаков И.П., совместно с Макар-Лиманов Л.Г. (Wayne State Univ., USA))

Теорема о свободе (the Freiheitssatz) является одним из базовых утверждений комбинаторной теории того или иного класса алгебраических систем (групп, алгебр). Одна из эквивалентных формулировок этого утверждения состоит в том, что любое нетривиальное уравнение над свободной системой F (группой, алгеброй) имеет решение в некотором расширении системы F. Классические результаты Магнуса и Ширшова показывают, что теорема о свободе верна для групп и алгебр Ли, а более свежие результаты ряда авторов состоят в доказательстве этого утверждения для ассоциативных алгебр, правосимметрических алгебр и алгебр Пуассона. Нами доказана теорема о свободе для общих алгебр Пуассона: систем с коммутативным ассоциативным умножением и антикоммутативной скобкой, связанными тождеством Лейбница.

P.S. Kolesnikov, L.G. Makar-Limanov, I.P. Shestakov. The Freiheitssatz for generic Poisson algebras // Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications 10 (2014), 115; doi:10.3842/SIGMA.2014.115

8. **Установлены точные оценки алгоритмической сложности для различных классов вычислимых моделей, автоустойчивых относительно сильных конструктивизаций** (Директор, д.ф.-м.н., чл.-корр. РАН Гончаров С.С., н.с., к.ф.-м.н. Баженов Н.А., аспирант Марчук М.И.)

Одним из центральных вопросов в теории вычислимых моделей является проблема существования и единственности для представления данной модели, обладающей

естественными алгоритмическими или теоретико-модельными свойствами. Исследование индексных множеств позволяет изучать алгоритмическую сложность и синтаксическую определимость для данной проблемы.
В теории вычислимости особую роль играют сильно конструктивные модели (модели, для которых можно эффективно проверять истинность формул первого порядка). Модель M является автоустойчивой относительно сильных конструктивизаций, если она имеет единственную (с точностью до вычислимого изоморфизма) сильно конструктивную копию. В работе получены точные оценки сложности в гиперарифметической иерархии для индексных множеств классов сильно конструктивизируемых вычислимых моделей нетривиальной сигнатуры, автоустойчивых относительно сильных конструктивизаций. Также найдена точная сложность для индексных множеств классов автоустойчивых относительно сильно конструктивизаций булевых алгебр, дистрибутивных решеток, частичных порядков, линейных порядков, колец, коммутативных полугрупп.

Гончаров С.С., Марчук М.И. Индексные множества автоустойчивых относительно сильных конструктивизаций конструктивных моделей ограниченной сигнатуры // Алгебра и логика. – 2015. – Т.54, №2. – С.163-192.
Гончаров С.С., Марчук М.И. Индексные множества автоустойчивых относительно сильных конструктивизаций конструктивных моделей нетривиальных сигнатур // Докл. АН. – 2015. – Т.461, №2. – С.140-142.
Гончаров С.С., Баженов Н.А., Марчук М.И. Индексное множество автоустойчивых относительно сильных конструктивизаций булевых алгебр // Сиб. матем. журн. – 2015. – Т.56, №3. – С.498-512.
Гончаров С.С., Баженов Н.А., Марчук М.И. Индексные множества автоустойчивых относительно сильных конструктивизаций конструктивных моделей естественных классов // Докл. АН. – 2015. – Т.464, №1. – С.12-14.
Индексные множества почти простых конструктивных моделей // Вестн. НГУ, серия: матем., мех., информ., 2013, № 3, 38-52).
Гончаров С.С., Баженов Н.А., Марчук М.И. Индексное множество автоустойчивых относительно сильных конструктивизаций линейных порядков // Вестн. НГУ. Сер. Матем., мех. информ. – 2015. – Т. 15, № 3. – С.51-60.

9. **Решена проблема интерполяции в наиболее важных расширениях минимальной логики Йохансона, исследованы интерполяционные свойства над минимальной логикой J** (г.н.с., д.ф.-м.н., профессор Максимова Л.Л., с.н.с., к.ф.-м.н. Юн В.Ф.

Решена проблема интерполяции в наиболее важных расширениях минимальной логики J Йохансона.
Известная классификация Одинцова разбивает паранепротиворечивые расширения минимальной логики на интервалы. Найденное ранее Максимовой описание логик со слабым интерполяционным свойством WIP выделяет над J восемь интервалов логик с WIP. В работе описаны все минимальные логики в интервалах Одинцова, обладающие интерполяционным свойством Крейга CIP, показана их узнаваемость над J. Найдена семантическая характеризация и установлено свойство CIP для всех WIP-минимальных логик.
Исследовалась проблема узнавания над минимальной логикой Йохансона. Доказана узнаваемость некоторых известных логик над J, показана узнаваемость над J всех стройных логик, обладающих интерполяционным свойством Крейга CIP, ограниченным интерполяционным свойством IPR или проективным свойством Бета PBP.
При изучении интерполяционных свойств в расширениях минимальной логики рассматривалась классификация J-логик, в соответствии с их интуиционистскими и негативными напарниками, предложенная С.П.Одинцовым. При этом все логики разбиваются на интервалы. Доказано, что нижний конец интервала имеет интерполяционное свойство Крейга CIP тогда и только тогда, когда оба его напарника имеют CIP. Также доказано, что нижние и верхние концы, которые имеют CIP, узнаваемы над J. Найдена их семантическая характеризация.

Кроме того, рассматривалось интерполяционное свойство Крейга CIP для WIP-минимальных логик. Ранее было доказано, что слабое интерполяционное свойство WIP является разрешимым над логикой J. При этом все логики с WIP разбиваются на восемь попарно не пересекающихся интервалов. Ранее Л.Л.Максимовой доказано, что верхние концы этих интервалов обладают и более сильным интерполяционным свойством Крейга CIP. Кроме того, в [*Л.Л.Максимова. Негативная эквивалентность над минимальной логикой и интерполяция, СЭМИ, 11 (2014), 1—17*] были найдены аксиоматизация и семантическая характеризация нижних концов интервалов с WIP (WIP-минимальных логик). Там же было установлено свойство CIP для шести из восьми WIP-минимальных логик.
В данной работе доказывается, что две оставшиеся логики также обладают интерполяционным свойством Крейга CIP. Таким образом, все WIP-минимальные логики обладают свойством CIP.

Л.Л. Максимова, В.Ф. Юн. Интерполяция над минимальной логикой и интервалы Одинцова. Сибирский Математический Журнал, Т. 56 (2015), № 3, 600–616.
Л.Л. Максимова, В.Ф. Юн. WIP-минимальные логики и интерполяция, Сибирские Электронные Математические известия, Т.12 (2015), 7-20.
Л.Л. Максимова, В.Ф. Юн. Узнаваемые логики. Алгебра и логика, Том 54 (2015), № 2, 252-274.

10. **Доказано, что теория папповых проективных плоскостей полна относительно спектров степеней автоморфно нетривиальных структур, эффективных размерностей, спектров степеней отношений, спектров категоричности и спектров автоморфизмов. Отсюда, как следствие, получен результат о том, что для любого натурального n>1 существует вычислимая паппова проективная плоскость вычислимой размерности n** (с.н.с., к.ф.-м.н., доцент Когабаев Н.Т.

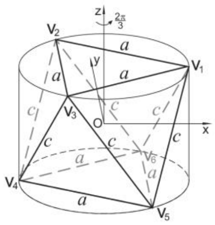
Изучение вопросов реализуемости различных видов спектров степеней и эффективных размерностей в счётных структурах является одним из основных направлений исследований в теории вычислимых моделей. Подобные вопросы рассматриваются как в общем случае, так и в конкретных классах алгебраических систем. В работе Хиршвельдта, Хусаинова, Шора и Слинько было доказано, что теория ориентированных графов полна относительно спектров степеней и эффективных размерностей, т.е. спектры степеней и эффективные размерности, которые удается реализовать в каких-либо структурах, можно также реализовать и в классе ориентированных графов.
В работе Хиршвельдта, Хусаинова, Шора и Слинько было также установлено, что полными относительно спектров степеней нетривиальных структур, d-вычислимых размерностей, вычислимых размерностей константных расширений и спектров степеней отношений являются теории следующих классов: симметричные иррефлексивные графы, частичные порядки, решетки, кольца (с делителями нуля), области целостности произвольной характеристики, коммутативные полугруппы, 2-ступенно нильпотентные группы. В недавней работе Миллера, Пак, Пунена, Шутенса и Шлапентох доказано, что теория полей полна относительно спектров степеней нетривиальных структур, d-вычислимых размерностей, спектров степеней отношений, спектров категоричности и спектров автоморфизмов.
Основным результатом настоящей работы является следующая теорема: Теория проективных плоскостей полна относительно спектров степеней нетривиальных структур, d-вычислимых размерностей, спектров степеней отношений, спектров категоричности и спектров автоморфизмов.
Одним из следствий данного результата является существование проективных плоскостей вычислимой размерности n, где n>1.

Н.Т.Когабаев, Теория проективных плоскостей полна относительно спектров степеней и эффективных размерностей, Алгебра и логика, 54, N 5 (2015), в печати.
N.Kogabaev, The theory of projective planes is complete with respect to degree spectra and effective dimensions, 15th Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science and Logic Colloquium 2015, Book of Abstracts, 3-8 August 2015, University of Helsinki, p.687.

1.1.2. Геометрия и топология

11. **Разработан новый универсальный математический аппарат для получения точных интегральных формул объемов гиперболических многогранников с симметриями** (с.н.с., к.ф.-м.н. Абросимов Н.В. зав. лаб., д.ф.-м.н. Медных А.Д., совместно с Кудиной Е.С., аспирант ГАГУ)

Разработан новый универсальный математический аппарат для получения точных интегральных формул объемов гиперболических многогранников с симметриями. Сначала соответствующий многогранник моделируется в евклидовом пространстве, вычисляются координаты его вершин. Затем евклидов многогранник помещается в проективную модель Кэли-Клейна гиперболического пространства (при этом возникают дополнительные условия на координаты). Используется векторная алгебра в проективном пространстве, чтобы выразить длины ребер и двугранные углы (уже в гиперболической метрике) через координаты вершин. Симметрия многогранника используется, чтобы исключить неинвариантные параметры (координаты) и получить прямые соотношения между длинами и углами гиперболического многогранника. Последние соотношения, с одной стороны, позволяют установить теоремы существования гиперболических многогранников, а с другой – найти точные решения дифференциального уравнения Шлефли, связывающего объем, длины ребер и двугранные углы – что дает точные интегральные формулы объемов. Указанный подход успешно применен авторами для получения точных формул объема гиперболических октаэдров с симметриями.



Критерий существования такого октаэдра:

$$3\,\mathrm{ch}\,c - \mathrm{ch}\,a - 2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{sh}^2\,\frac{a}{2}}{\mathrm{sh}^2\,\frac{c}{2}} < 3.$$

Theorem

Объем гиперболического октаэдра $\mathcal{O} = \mathcal{O}(a, c)$, допускающего $\overline{3}$-симметрию, равен

$$V = \int_0^a \frac{3\,(a\,F + (1 + 2\,\mathrm{ch}\,a)\,c\,G)}{(1 + 2\,\mathrm{ch}\,a)\Delta}\,da\,,$$

где

$$\begin{aligned} F &= 1 + 2\,\mathrm{ch}\,a + 2\,\mathrm{ch}^2\,a + \mathrm{ch}^3\,a - 2\,\mathrm{ch}\,c - 2\,\mathrm{ch}\,a\,\mathrm{ch}\,c - \mathrm{ch}^2\,c \\ &\quad - \mathrm{ch}\,a\,\mathrm{ch}^2\,c + \mathrm{ch}^2\,a\,\mathrm{ch}\,c - 4\,\mathrm{ch}^2\,a\,\mathrm{ch}^2\,c + 3\,\mathrm{ch}^3\,c\,, \\ G &= \mathrm{sh}\,a\,\mathrm{sh}\,c\,(-1 + 2\,\mathrm{ch}\,a), \\ \Delta &= (\mathrm{ch}\,2c - \mathrm{ch}\,a)\sqrt{(-2 - \mathrm{ch}\,a + 3\,\mathrm{ch}\,c)(\mathrm{ch}\,a + \mathrm{ch}\,c)}. \end{aligned}$$

Рисунок 1. Объем гиперболического октаэдра с 3-симметрией

N.V. Abrosimov, E.S. Kudina, A.D. Mednykh. On the Volume of a Hyperbolic Octahedron with 3-Symmetry // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. - 2015. - Vol. 288, - P. 1-9.

12. **Доказано, что множество изгибаемых невырожденных многогранников данного комбинаторного строения не всегда является алгебраическим** (в.н.с., д.ф.-м.н., доцент Александров В.А.)

Приведён пример замкнутого неизгибаемого невырожденного многогранника P в трёхмерном евклидовом пространстве, который является пределом последовательности неизометричных ему изгибаемых невырожденных многогранников, имеющих одинаковое с P комбинаторное строение. Отсюда немедленно следует, что множество всех изгибаемых невырожденных многогранников, имеющих одинаковое с P комбинаторное строение, не является алгебраическим. Последнее утверждение является не только новым, но и неожиданным. В некотором смысле оно объясняет, почему методы алгебраической геометрии весьма ограниченно применяются в теории изгибаемых многогранников.

Александров В.А. Множество изгибаемых многогранников данного комбинаторного типа не всегда является алгебраическим // Сиб. матем. ж. – 2015. – Т. 56, № 4. – С. 723–731.

13. **Найдены геодезические, кратчайшие, множества раздела, сопряженные множества для некоторых слабо симметрических по А. Сельбергу пространств с инвариантной субримановой метрикой** (в.н.с., д.ф.-м.н., профессор Берестовский

В.Н.)

Найдены геодезические, кратчайшие, множества раздела, сопряженные множества (соотв., расстояния между точками) для групп Ли $SO_0(2,1)$, SO(3) (соотв., SU(2) и SO(3)) с левоинвариантными субримановыми метриками, инвариантными относительно правых сдвигов на элементы подгруппы SO(2), т.е. слабо симметрических по А. Сельбергу пространств $SO_0(2,1)\times SO(2)/SO(2)$, $SO(3)\times SO(2)/SO(2)$ (соотв., $SU(2)\times SO(2)/SO(2)$ и $SO(3)\times SO(2)/SO(2)$) с инвариантной субримановой метрикой. В том числе подтверждена гипотеза: каждое слабо симметрическое пространство с инвариантной субримановой метрикой геодезически орбитально, т.е. каждая его геодезическая – орбита 1-параметрической группы изометрий.

Берестовский В.Н. Универсальные методы поиска нормальных геодезических на группах Ли с левоинвариантной субримановой метрикой // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 5. С. 959-970.
Berestovskii V.N., Gorbatsevich V.V. Homogeneous Spaces with Inner Metric and with Integrable Invariant Distributions // Journal of Mathematical Sciences. 2015. V. 207, № 3. P. 410-466.
Berestovskii V.N. Locally compact homogeneous spaces with inner metric. J. Generalized Lie Theory Appl. 2015, 9:1 http://dx.doi.org/10.4172/1736-4337.1000223.
Берестовский В.Н. (Локально) кратчайшие специальной субримановой метрики на группе Ли $SO_0(2,1)$ // Алгебра и анализ. 2015. Т. 27, № 1. С. 3-22.
Берестовский В.Н., Зубарева И.А. Геодезические и кратчайшие специальной субримановой метрики на группе Ли SO(3) // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56, № 4. С. 762-774.
Берестовский В.Н., Зубарева И.А. Субриманово расстояние в группах Ли SU(2) и SO(3) // Мат. труды. 2015. Т. 18, № 2. С. 3-21.
Berestovskii V.N., Zubareva I.A. Sub-Riemannian distance on the Lie group $SO_0(2,1)$. arXiv:1507.05554v2 [math.DG] 21 Jul. 2015.
Berestovskii V.N., Zubareva I.A. Geodesics and shortest arcs of special Sub-Riemannian metric on the Lie group SL(2). arXiv:1507.0722 [math.DG] 26 Jul. 2015.

1.1.3. Математический анализ

14. **Решена классическая проблема Болла–Мюра. Найдено необходимое и достаточное условие полунепрерывности снизу интегральных функционалов относительно слабой сходимости в пространстве Соболева** (с.н.с., к.ф-.м.н. Сычев М.А.)

В конце 70-х годов Джон Болл предложил метод решения задач теории упругости на основе минимизации интегральных функционалов энергии. При этом функционалы считались полунепрерывными снизу относительно слабой сходимости в пространстве $W^{1,p}$, но оставалось неясным, какие условия необходимы и достаточны для полунепрерывности в общем случае. В классической работе Болла–Мюра 1984-го года показано, что необходимым условием является $W^{1,p}$-квазивыпуклость интеграндов. М.А. Сычев нашел необходимое и достаточное условие для интегральных функционалов вида $J(u)=\int_\Omega L(Du(x))\,dx$, $u: R^n \to R^m,\ L: R^{n\times m} \to \overline{R}$, где функция L является $W^{1,p}$-квазивыпуклой и такой, что $L(v) \geq \alpha\,|\,v\,|^p + \beta,\ \ \alpha > 0, p > 1$. Требуемое условие состоит в следующем: для всякого $a \in R^{n\times m}$ и любой последовательности u_k, слабо сходящейся в $W^{1,p}$ к линейной функции l_a с градиентом a и $\limsup J(u_k) < \infty$, существуют подпоследовательность u_{k_j} и последовательность $\varphi_j \in l_a + W_0^{1,p}$ такие, что $\liminf\{J(u_{k_j}) - J(\varphi_j)\} \geq 0$. Тем самым решена принципиальная проблема вариационного исчисления.

М.А. Сычев, Решение проблемы Болла–Мюра, Доклады РАН, 2015, т. 465, N 4, с. 411-414.

15. **Разработан метод, позволяющий исследовать обобщенный класс отображений с ограниченным искажением при наиболее естественных аналитических предположениях** (зав. лаб., д.ф.-м.н., профессор Водопьянов С.К., совместно с Байкиным А.М., аспирант НГУ)

Отображения с ограниченным весовым (p,q)-искажением представляют собой естественное обобщение известного в литературе класса отображений с ограниченным искажением, входящего в двухиндексную шкалу при p=q=n и отсутствии весовых функций. В случае n-1<q ≤ p=n отображения с ограниченным (p,q)-искажением исследовались ранее в ряде работ при дополнительном предположении N-свойства Лузина данного отображения.
В представляемых работах заложены основы теории отображений с ограниченным (p,q)-искажением, полученные без дополнительных аналитических предположений. Основу теории составляют новые аналитические свойства перенесенных функций: мы, в частности, доказываем, что на образе точек ветвления градиент перенесенной функции равен нулю почти всюду. Выведены оценки на емкости образов конденсаторов для отображений с ограниченным (p,q)-искажением. Получены теоремы типа Лиувилля, теоремы о затирании особенностей для отображений данного класса, и применение к классификации многообразий.

Водопьянов С.К. О регулярности функции Полецкого при слабых аналитических предположениях исходного отображения // Докл. АН. 2014. Т. 455, № 2. С. 130-134.
Байкин А. Н., Водопьянов С.К. Емкостные оценки, теоремы типа Лиувилля и об устранении особенностей для отображений с ограниченным (p,q)-искажением // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56, №2. С. 290--321.

1.1.4. Дифференциальные уравнения и математическая физика

16. **Доказана разрешимость краевой задачи для стационарной системы уравнений Навье-Стокса в ограниченных областях с неоднородными граничными данными, при необходимом и достаточном условии равенства нулю суммарного потока, в классе плоских и осесимметри-чных пространственных течений (внс, д.ф.-м.н. М.В.Коробков)**

Получено положительное решение одной из классических задач гидродинамики – так называемой проблемы Лерэ, которая оставалась открытой более 80 лет (начиная со знаменитой публикации Жана Лерэ 1933 г.). А именно, в классе плоских и осесимметричных пространственных течений доказана разрешимость краевой задачи для стационарной системы уравнений Навье-Стокса в ограниченных областях с неоднородными граничными данными, при необходимом и достаточном условии равенства нулю суммарного потока.
По закону сохранения массы суммарный поток (т.е. сумма потоков жидкости через все компоненты границы области) должен быть равен нулю, это необходимое условие разрешимости. Однако сам Лерэ доказал существование решения задачи при более сильном предположении, что поток жидкости через каждую компоненту границы равен нулю (данное условие означает отсутствие источников и стоков). Случай, когда равен нулю лишь суммарный поток (т.е. когда допускаются источники и стоки), остался неразобранным, и вопрос о существовании (или не существовании) решения при этом условии получил в научном сообществе наименование проблема Лерэ. Основным инструментом при решении данной проблемы явился новый аналог классической теоремы Морса-Сарда о критических значениях для соболевских пространств функций при минимальных предположениях гладкости, полученный в работе автора (2015г).

Korobkov M.V., Pileckas K., Russo R., ``Solution of Leray's problem for stationary Navier-Stokes equations in plane and axially symmetric spatial domains," Ann. of Math., 181, No. 2 (2015), 769–807. http://dx.doi.org/10.4007/annals.2015.181.2.7
Korobkov M.V., Pileckas K., Russo R., ``The existence theorem for steady Navier-Stokes equations in the axially symmetric case," Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5), 14, No. 1 (2015), 233–262. http://dx.doi.org/10.2422/2036-2145.201204_003

Bourgain J., Korobkov M.V., Kristensen J., On the Morse–Sard property and level sets of W^{n,1} Sobolev functions on R^n," Journal fur die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal), 2015, No. 700 (2015), 93–112.http://dx.doi.org/10.1515/crelle-2013-0002

17. **Решена обратная задача квантовой теории рассеяния о конструктивном восстановлении потенциала в уравнении Шредингера по заданному модулю рассеянного поля, измеренному при высоких уровнях энергии** (зав. лаб., д.ф.-м.н. Романов В.Г., совместно с Клибановым М.В., University of NorthCarolina at Charlotte, USA)

Суть результата: построение потенциала сведено к хорошо известной задаче томографии о восстановлению функции через ее интегралы по всевозможным прямым. Это дает возможность эффективно и устойчиво отыскивать потенциал. Ранее обратная задача квантовой теории рассеяния активно изучалась в работах отечественных и зарубежных авторов, в предположении, что может збыть измерено полное рассеянное поле, т.-е. его модуль и фаза. Однако в фиических экспериментах на высоких энергиях можно измерять только поперечное сечение рассеяния, которое определяется как квадрат модуля рассеянного поля. В связи с этим, в книге K. Chadan and P.C. Sabatier, Inverse Problems in Quantum Scattering Theory, Springer, New York, 1977, была поставлена задача о восстановлении потенциала по модулю рассеянного поля. Эта задача впервые решена в этом году в совместных работах М.В. Клибанова и В.Г. Романова.

Klibanov M.V., Romanov V.G. The first solution of a long standing problem: Reconstruction formula for a 3-d phaseless inverse scattering problem for the Schrodinger equation // J. of Inverse and Ill-Posed Problems, 2015. Vol. 23, No. 4, p. 415-428.
Klibanov M.V., Romanov V.G. Explicit formula for the solution of the phaseless inverse scattering problem of imaging of nano structures / /J. of Inverse and Ill-Posed Problems, 2015. Vol. 23, No . 2, p. 187-193.
Klibanov M.V., Romanov V.G. Explicit solution of 3-D phaseless inverse scattering problem for the Schrodinger equation: the plane wave case // Eurasian J. of Mathematical and Computer Applications. 2015. Vol. 3, No. 1, p. 48-63.

18. **Предложена конструкция разрушающихся решений модифицированного уравнения Веселова-Новикова** (зав.лаб., д.ф.-м.н., академик Тайманов И.А.)

Построено решение модифицированного уравнения Веселова-Новикова (двумерного обобщения модифицированного уравнения Кортевега-де-Фриза), которое имеет гладкие быстро убывающие начальные условия и которое становится сингулярным в точности в одной точке и в единственный момент времени. Примененный метод основан на геометрической интерпретации преобразовании Мутара для двумерных операторов Дирака в терминах геометрии поверхностей. Построенный пример получен с помощью минимальной поверхности Эннепера.

И.А. Тайманов. Разрушающиеся решения модифицированного уравнения Веселова-Новикова и минимальные поверхности, Теор. и матем. физика. 2015. Т. 182, № 2. С. 213-222.

19. **Изучены деформации коммутативных колец формально самосопряженных обыкновенных дифференциальных операторов ранга два, заданные солитонными уравнениями. Построены новые примеры коммутирующих формально самосопряженных обыкновенных дифференциальных операторов ранга два, которые отвечают гиперэллиптическим спектральным кривым** (инженер Давлетшина В.Н.)

Изучены решения ранга два известной интегрируемой системы уравнений, задаваемой парой Лакса для формально самосопряженного оператора четвертого порядка и кососимметрического оператора нечетного порядка. При этом самосопряженный оператор четвертого порядка должен входить в коммутативное кольцо дифференциальных операторов ранга 2. В случае эллиптической спектральной кривой полученные уравнения сводятся к уравнениям иерархии Кричевера-Новикова.

Давлетшина, В.Н. Самосопряженные коммутирующие дифференциальные операторы ранга два и их деформации, заданные солитонными уравнениями / В.Н. Давлетшина // Математические заметки. 2015. Т. 97, вып.3. С. 350 - 358.
Давлетшина, В.Н. Коммутирующие дифференциальные операторы ранга два с тригонометрическими коэффициентами / В.Н. Давлетшина // Сибирский математический журнал. 2015. Т. 56, М: 3. С. 513 - 519.

1.1.5. Теория вероятностей и математическая статистика

20. **Впервые установлены принципы больших уклонений для траекторий обобщенных процессов восстановления** (г.н.с. - советник РАН, академик А.А. Боровков, г.н.с., д.ф.-м.н. А.А. Могульский)

Установлены так называемые "частичные" локальные принципы больших уклонений на элементах пространства непрерывных функций, найден вид функционала уклонений. При более ограничительных условиях на распределение скачков (усиленном условии Крамера) установлены "полные" локальный и интегральный принципы больших уклонений в пространстве функций без разрывов второго рода.

Боровков А.А., Могульский А.А. Принципы больших уклонений для конечномерных распределений обобщенных процессов восстановления. Сибирский математический журнал, 2015, т. 56, № 1, с.36–64.
Боровков А.А., Могульский А.А. Принципы больших уклонений для траекторий обобщенных процессов восстановления. I. Теория вероятностей и ее применения, 2015,
т. 60, вып. 2, с. 227–247.
Боровков А.А., Могульский А.А. Принципы больших уклонений для траекторий обобщенных процессов восстановления. II. Теория вероятностей и ее применения, 2015, т. 60, вып. 3, с. 419-435.
Боровков А. А., Могульский А.А. О принципах больших уклонений для сумм случайных векторов и соответствующих функций восстановления в неоднородном случае
Математические труды, 2014, Том 17, № 2, с. 84-101.

1.1.6. Вычислительная математика

1.1.7. Математическое моделирование

21. **В математических моделях генных сетей произвольной структуры выявлены структурные и параметрические мотивы, обеспечивающие хаотическую динамику их функционирования** (с.н.с., к.ф.-м.н. Когай В.В., г.н.с., д.ф.-м.н. Фадеев С.И., совместно с Хлебодаровой Т.М. ИЦиГ СО РАН, Лихошваем В.А. ИЦиГ СО РАН)

Исследованы математические модели, описывающие генные сети произвольной структуры. Выявлены структурные и параметрические мотивы, обеспечивающие хаотическую динамику функционирования моделей:

1) Существование подходящих комбинаций позитивных и негативных регуляторных петель.
2) Наличие явных или неявных запаздываний действия управляющих сигналов.

Основываясь на выявленных закономерностях, разработаны подходы, которые позволяют строить системы дифференциальных уравнений, включая уравнения с запаздываниями, моделирующие генные сети произвольной размерности с хаотической динамикой.
Изучена хаотическая динамика в моделях альтернативного сплайсинга (сплайсинг- процесс вырезания определенных нуклеотидных последовательностей из молекул РНК и их соединения в определенную последовательность.). Найден пример, в котором показана возможность перехода к хаотической динамике по всем известным основным сценариям. К ним относятся переходы к хаосу: по сценарию Фейгенбаума, через последовательность бифуркаций удвоения периода; по сценарию Рюэлля-Такена через квазипериодические режимы; по сценариям Помо-Манневиля через перемежаемость I, II и III типа. Описаны параметрические особенности каждого типа перехода к хаосу. Найденная модель является единственным известным нам примером, демонстрирующим все классические сценарии перехода к хаотической динамике. Впервые прогнозируется, что переход к хаосу по II типу перемежаемости может быть реализован в биологической системе.

Likhoshvai VA., Fadeev S.I., Kogai V.V., Khlebodarova T.M. On the chaos in gene networks //J. Bioinform. Comput. Biol., 2013, V.11, №1, 1340009.
Likhoshvai V.A., Kogai V.V., Fadeev S. I., Khlebodarova T.M. Alternative splicing can lead to chaos // J. Bioinform. Comput. Biol., 2015, V.13, №1, 1540003.
Когай В.В., Хлебодарова Т.М., Фадеев С.И., Лихошвай В.А. Сложная динамика в системах альтернативного сплайсинга мРНК: математическая модель // Вычислительные технологии, 2015, Т.20, №1, С.38-52.

22. **В терминах нечеткого доминирования получено описание различных аналогов равновесия Бержа в моделях с экстерналиями, дающее кооперативную характеризацию таким явлениям, как альтруизм и его комбинации со стандартным экономическим эгоизмом** (г.н.с. д.ф.-м.н., профессор Васильев В.А.)

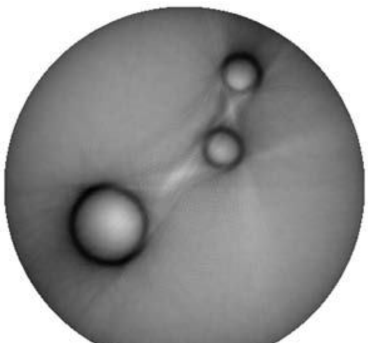
Предложена конкретизация некоторых аналогов равновесия Бержа применительно к моделям чистого обмена с экстерналиями, отличающимся от классических рынков учетом внешних воздействий на предпочтения экономических агентов. В моделях с экстерналиями введено понятие *A*-равновесия, обобщающее равновесие по Вальрасу-Нэшу, и в терминах нечетких *A*-ядер установлена кооперативная характеризация таких явлений, как альтруизм и его комбинации со стандартным экономическим эгоизмом. Установлена коалиционная оптимальность *A*-равновесий и для широкого класса моделей обмена доказано обобщение классической теоремы об эквивалентности ядер и равновесий.
Проводимый анализ осуществляется в рамках развиваемого автором общего подхода, опирающегося на двойственное описание равновесных состояний и систематическое использование нечеткого блокирования, адекватного рассматриваемой концепции экономического равновесия.

Валерий А. Васильев *A*-равновесие и нечеткое *A*-ядро в модели чистого обмена с экстерналиями // Математическая теория игр и её приложения. 2015. Том 7, вып. 1, с. 15-31.
Васильев В.А. О кооперативной характеризации А равновесий // "Проблемы оптимизации и экономические приложения": Материалы VI Международной конференции (Омск, 28 июня–4 июля 2015). — Омск: Изд-во Ом. гос. ун-та, 2015, с. 17-21.
Васильев В.А. О коалиционной оптимальности *A*-равновесий // Анализ, моделирование, управление, развитие социально-экономических систем: сб. науч. трудов IX Междунар. школы-симпозиума АМУР-2015, Севастополь, 12-21 сентября 2015. – Симферополь: КФУ имени В. И. Вернадского, 2015. – С. 62-65.

23. **Доказана теорема единственности решения задачи интегральной геометрии о неизвестной границе, в которой известными данными считаются интегралы от неизвестных функций по неизвестному семейству кусочно-гладких кривых в евклидовом пространстве любой конечной размерности** (зав. лаб., д.ф.-м.н.,

профессор Аниконов Д.С., с.н.с., к.ф.-м.н. Коновалова Д.С.)

Исследована задача интегральной геометрии о неизвестной границе. Известными данными считаются интегралы от неизвестных функций по неизвестному семейству кривых в евклидовом пространстве любой конечной размерности. Особенностью постановки задачи является факт зависимости неизвестных параметров от большего числа переменных, чем известные данные. Отмечается, что при этих условиях традиционная задача интегральной геометрии о нахождении подынтегральных функций была бы недоопределенной. Поэтому искомым объектом объявляются только поверхности разрывов подынтегральных функций. Доказана теорема единственности решения поставленной задачи при весьма общих ограничениях. Выполненная работа является итогом предыдущих исследований авторов для одномерных многообразий.
Иллюстрацией применения подобных результатов может служить ранее проведенное авторами исследование задачи рентгеновской томографии, где интегрирование производилось по всевозможным прямым. Был проведен численный эксперимент для реконструкции среды с большой оптической толщиной, содержащей неоднородности в виде трех шаров. Ниже приведено соответствующее изображение. Более темным цветом показаны значения индикаторной функции, принимающей аномально большие значения вблизи искомых границ, что дает представление о внутренней структуре зондируемого объекта.



Аниконов Д.С., Коновалова Д.С. Недоопределенная задача интегральной геометрии для семейства кривых // Сиб. Мат. Журнал 2015, т. 56, №2, с.265-281.
Д.С. Аниконов, Д.С. Коновалова Задача интегральной геометрии для семейства кривых при неполных данных // ДАН, 2015, т.464, №1, С.7-11.

1.1.10. Дискретная математика, информатика и математическая кибернетик

24. **Доказано, что количество трансверсалей в латинских квадратах порядка *n* не превышает $n^n e^{-2n+o(n)}$ при n→∞, и эта оценка асимптотически не улучшаема в классе полистохастических матриц** (аспирант Тараненко А.А.)

Латинским квадратом порядка ***n*** называется таблица размера ***n* х *n***, клетки которой заполнены ***n*** различными числами, причём каждое число встречается в любой строке и столбце ровно один раз. Трансверсалью латинского квадрата является такой набор из ***n*** его элементов, что никакие два элемента из набора не лежат в одной строке или столбце, и значения всех элементов различны. Латинские квадраты соответствуют таблицам умножения квазигрупп и имеют многочисленные приложения в криптографии, теории кодирования и теории планирования эксперимента.
Доказано, что количество трансверсалей в латинских квадратах порядка ***n*** не превышает $n^n e^{-2n+o(n)}$ при n→∞ . Доказаны некоторые свойства перманентов многомерных матриц и получена асимптотически достижимая верхняя оценка перманента полистохастической матрицы. На их основе существенно улучшена известная оценка числа трансверсалей в произвольном латинском квадрате. Недавно S.Eberhard, F.Manners, R.Mrazovic доказали, что эта верхняя оценка достигается на таблицах Кэли циклических групп.

A.A.Taranenko. Multidimensional permanents and an upper bound on number of transversals in Latin squares // Journal of Combinatorial Designs, V.23(7). P. 305–320, 2015. DOI 10.1002/jcd.
Результат докладывался на семинарах Дискретный анализ

25. **Предложены асимптотически точные эффективные алгоритмы для некоторых труднорешаемых задач маршрутизации** (г.н.с., д.ф.-м.н. Гимади Э.Х., н.с., к.ф.-м.н. Рыков И.А., аспирант ИМ Цидулко О.Ю.)

Рассматриваются труднорешаемые задачи маршрутизации на полном n-вершинном взвешенном графе, когда требуется найти семейство заданного числа m вершинно (или реберно) непересекающихся циклов графа с экстремальным суммарным весом ребер. К частному случаю (при m=1) относится NP-трудная классическая задача коммивояжера, в которой ищется одноциклический (гамильтонов) цикл. Авторами представлены следующие результаты. 1) Для задачи отыскания m реберно-непересекающихся гамильтоновых циклов максимального суммарного веса на графе с вершинами в многомерном евклидовом пространстве построен алгоритм кубической трудоемкости, асимптотически точный при числе циклов m, ограниченном величиной nk, где k в пределах от 1/2 до 6/7 в зависимости от размерности пространства. 2) Получены результаты вероятностного анализа полиномиального алгоритма решения задачи о нескольких реберно-непересекающихся маршрутах коммивояжера (как на минимум, так и на максимум суммарнного веса ребер) с разными весовыми функциями гамильтоновых циклов. На случайных входных данных с равномерным распределением весов ребер, принимающих положительные значения на ограниченном интервале чисел обоснованы достаточные условия на число m коммивояжеров, при которых алгоритм асимптотически точен. 3) Аналогичные условия получены для m-слойной трехиндексной планарной задачи о назначениях на случайных входных данных. 4) Для задачи покрытия полного неориентированного графа m вершинно-непересекающимися циклами построены приближенные алгоритмы с кубической временной сложностью и доказана их асимптотичесая точность при числе покрывающих циклов m=o(n) для евклидовой задачи на максимум и m ≤ n1/3/ ln n – в задаче на минимум на случайных входах с равномерным распределением весов ребер в интервале (0,1).

Edward Kh. Gimadi. Efficient Algorithms with performance guarantees for some problems of finding several discrete disjoint subgraphs in a complete weighted graph // Applied Mathematics and Computation. 2015, Vol. 255, 1-2, P. 84-91. DOI: 10.1016/ j.ams2014.11.37.
Э.Х. Гимади, И.А. Рыков. Об асимптотической точности решения евклидовой задачи покрытия графа m несмежными циклами максимального суммарного веса // Доклады АН. 2015. Том 466, № 5.
E.Kh. Gimadi, A.N. Glebov, A.A. Skretneva, O.Yu. Tsidulko, D.Zh. Zambalaeva. Combinatorial algorithms with performance guarantees for finding several Hamiltonian circuits in a complete directed weighted graph // Discrete Applied Mathematics, Elsevier, 2015. DOI: 10.1016/j.dam.2015.03.007.
Э. Х. Гимади, И. А. Рыков. Асимптотически точный подход к приближенному решению некоторых задач покрытия графа m несмежными циклами // Труды ИММ УрО РАН. 2015. Т. 21, № 3, С. 89-99.

26. **Предложены эффективные приближенные алгоритмы с гарантированными оценками качества (точности, трудоемкости, вероятности несрабатывания) для одной из NP-трудных в сильном смысле квадратичных евклидовых задач разбиения конечного множества точек на два кластера** (зав. лаб., д.ф.-м.н. Кельманов А.В., с.н.с., к.ф.-м.н. Хамидуллин С.А., асп. Хандеев В.И., с.н.с., к.ф.-м.н. Шенмайер В.В.)

Предложены эффективные приближенные алгоритмы с гарантированными оценками качества (точности, трудоемкости, вероятности несрабатывания) для одной из NP-трудных в сильном смысле задач разбиения конечного множества точек евклидова пространства на два кластера по критерию минимума суммы по обоим кластерам внутрикластерных сумм квадратов расстояний от элементов кластеров до их центров. В отличие от известной более полувека труднорешаемой задачи (в литературе называемой 2-Means или 2-MSSC и уходящей корнями к классическим работам Фишера), в которой центры обоих кластеров определяются как неизвестные средние (т.е. геометрические центры или центроиды), в рассматриваемой задаче предполагается, что центр одного из кластеров задан в некоторой точке (без ограничения общности – в начале координат). Задача имеет приложения в комбинаторной геометрии, статистике и индуцируется проблемами среднеквадратического приближения, анализа данных и распознавании образов. Несмотря на фиксацию одного из центров в заданной точке, рассматриваемая задача остается в числе труднорешаемых задач дискретной оптимизации. Для этой задачи с дополнительным ограничением на мощности кластеров предложен эффективный рандомизированный алгоритм и обоснованы условия его асимптотической точности, построена полиномиальная аппроксимационная схема, обоснован точный псевдополиномиальный алгоритм для случая, в котором размерность пространства фиксирована (не является частью входа), а координаты точек целочисленны. Для задачи без ограничений на мощности кластеров, но с дополнительным ограничением на номера элементов, включаемых в кластеры, построен 2-приближенный алгоритм.

Кельманов А.В., Хандеев В.И. Рандомизированный алгоритм для одной задачи двухкластерного разбиения множества векторов // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2015. Т. 55, № 2. С. 335–344.
Долгушев А.В., Кельманов А.В., Шенмайер В.В. Полиномиальная аппроксимационная схема для одной задачи разбиения конечного множества на два кластера // Труды ИММ УрО РАН. 2015. Т. 21, № 3. С. 100-109.
Кельманов А.В., Хандеев В.И. Точный псевдополиномиальный алгоритм для одной задачи двухкластерного разбиения множества векторов // Дискретный анализ и исследование операций. 2015. Т. 22, № 4. С. 50–65.
Кельманов А.В., Хамидуллин С.А. Приближенный полиномиальный алгоритм для одной задачи бикластеризации последовательности // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2015. Т. 55, № 6. С. 1076–1085.

27. **Доказана сильная NP-трудность задачи календарного планирования с критерием максимизации прибыли и наличии возможности использования кредитов. Предложен алгоритм построения точного решения, основанный на схеме динамического программирования, выделен полиномиально разрешимый случай. Построена модель, в которой для поиска максимального значения прибыли требуется оптимизация кредитных заимствований** (д.ф.-м.н., с.н.с. В.В. Сервах, аспирант Е.А. Казаковцева)

Задача календарного планирования со складируемым ресурсом финансового типа и критерием максимизации чистой приведенной прибыли является NP-трудной в сильном смысле. Если рассматривать возможность использования кредитов, то ограничения на ресурсы отсутствуют, но возникают дополнительные затраты, связанные с выплатой процентов по кредитам. В настоящей работе доказано, что эта задача также является NP-трудной в сильном смысле. Получен ряд важных свойств, в частности,

- заданное расписание выполнения работ однозначно определяет объем кредитных заимствований;
- раннее расписание выполнения работ может быть не оптимальным, даже для случая, когда доходность всех работ больше ставки по кредиту;
- дополнительную прибыль за счет кредитов можно получить даже в том случае, если доходность всех работ меньше ставки по кредиту.

Предложен алгоритм построения точного решения задачи, получены условия, при которых данный алгоритм является полиномиальным. Сформирована подзадача и построена соответствующая модель, в которой для нахождения расписания с максимальным значением чистой приведенной прибыли необходимо оптимизировать размер кредитных заимствований.

Большинство современных инвестиционных проектов реализуется, как правило, с привлечением заемных финансовых ресурсов. Многочисленные статью по кредитованию таких проектов подразумевает наличие готового проекта, с заданными сроками выполнения работ. В настоящем исследовании показано, что оптимизацию кредитных заимствований можно вести и на стадии разработки проектов и составления расписаний выполнения работ. Полученные результаты позволяют обосновано подойти к выбору методов построения оптимальных графиков выполнения работ проектов с учетом возможности использования кредитов при решении реальных практических задач.

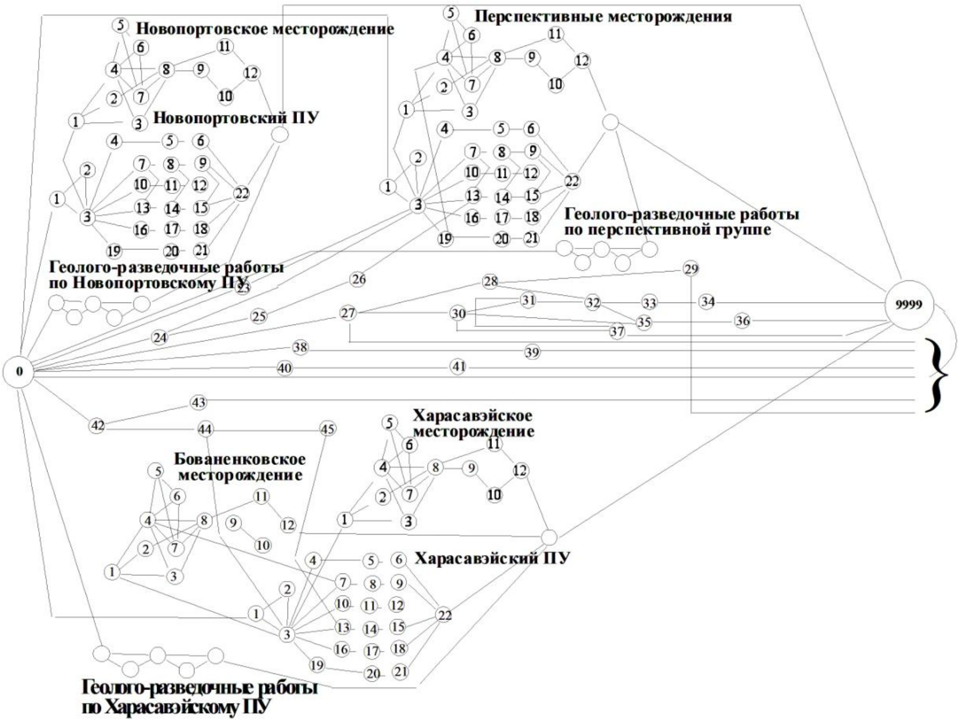


Рисунок 2 Фрагмент сетевой модели освоения углеводородных ресурсов полуострова Ямал (составлен в рамках интеграционного проекта в ИЭОПП СО РАН).

Мартынова Е.А., Сервах В.В. О задаче календарного планирования проектов с использованием кредитов // Автоматика и телемеханика, 2012. № 3, С.107-116.
Martynova E.A. Servakh V.V. On scheduling credited projects // Automation and Remote Control, March 2012, Volume 73, Issue 3, pp 508-516.
Казаковцева Е.А., Сервах В.В. Кредитование и анализ надежности расписаний в задаче календарного планирования проектов // Автоматика и телемеханика, 2014. № 7. С.87-98.
Kazakovtseva E.A. Servakh V.V. Financing and reliability analysis for schedules in the project calendar planning problem // Automation and Remote Control, 2014,Vol.75, pp. 1231-1240.
Казаковцева Е.А., Сервах В.В. Сложность задачи календарного планирования с кредитами // Дискретный анализ и исследование операций, 2015. Т.22, № 4. С.35–49.

28. **Получена точная формула для комбинаторной сложности бесконечных перестановок, порожденных неподвижными точками сравнимых равноблочных морфизмов, а также обобщенного морфизма Фибоначчи** (м.н.с. А.А. Валюженич)

Работа посвящена изучению свойств языков подперестановок бесконечных перестановок. Бесконечной перестановкой называется произвольный линейный порядок на множестве натуральных чисел. Под конечной перестановкой длины n будем понимать линейный порядок на множестве чисел 1,2,..,n. Конечная перестановка длины n называется подперестановкой бесконечной перестановки x, если она как линейный порядок изоморфна линейному порядку, индуцированному перестановкой x на некоторых n соседних натуральных числах. Комбинаторной сложностью бесконечной перестановки называется число ее различных подперестановок фиксированной длины. Под бесконечной перестановкой, порожденной бесконечным словом, будем понимать лексикографический порядок на множестве сдвигов

этого слова. Получена точная формула для комбинаторной сложности бесконечных перестановок, порожденных неподвижными точками сравнимых равноблочных морфизмов. Таким образом, впервые получена точная формула для комбинаторной сложности бесконечных перестановок, порожденных неподвижными точками бесконечного семейства морфизмов. Поскольку морфизм Туэ–Морса является сравнимым, то мы получаем альтернативное доказательство формулы перестановочной сложности слова Туэ-Морса, полученной С. Уидмером.
Кроме того, найдена точная формула для комбинаторной сложности бесконечных перестановок, порожденных неподвижными точками обобщенного морфизма Фибоначчи. Таким образом, впервые получена точная формула для комбинаторной сложности бесконечных перестановок, порожденных неподвижными точками неравноблочных морфизмов.

Valyuzhenich A. On permutation complexity of fixed points of some uniform binary morphisms // Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science, 2014, vol.16, N3, P. 95-128. http://www.dmtcs.org/dmtcs-ojs/index.php/dmtcs/article/view/2306
Валюженич А. А. О перестановочной сложности неподвижных точек некоторых неравноблочных бинарных морфизмов // Сибирские электронные математические известия, 2015, Т. 12, С. 64-79. DOI 10.17377/semi.2015.12.006

29. **Доказано, что значения произвольной собственной функции q-ичного n-мерного гиперкуба однозначно определены во всех вершинах шара ее значениями на соответствующей сфере при выполнении установленных достаточных условий на собственное число и радиус сферы. Указан случай, когда собственная функция полностью восстанавливается по ее значениям на сфере** (с.н.с., к.ф.-м.н. А.Ю. Васильева)

Изучаются собственные функции графа на вершинах q-ичного n-мерного гиперкуба, причем смежными являются вершины, различающиеся в точности в одной координате. Собственные функции графа определены как собственные функции его матрицы смежности (т.е. сумма значений в каждой сфере радиуса 1 пропорциональна значению в центре сферы). Доказано, что значения произвольной собственной функции q-ичного n-мерного гиперкуба однозначно определены во всех вершинах шара ее значениями на соответствующей сфере (при выполнении установленных достаточных условий на собственное число и радиус сферы). Указан радиус сферы (в зависимости от собственного числа), при котором собственная функция полностью восстанавливается по ее значениям на сфере этого радиуса.

А.Ю. Васильева, Восстановление собственных функций q-ичного n-мерного гиперкуба // Проблемы передачи информации, 2015. Т.51, Вып. 3. С. 31-40.

30. **Решены две проблемы теории кодирования – проблема существования транзитивных совершенных кодов, не являющихся пропелинейными и проблема существования гомогенных нетранзитивных совершенных кодов. Приведен критерий транзитивности совершенных двоичных кодов малого ранга** (с.н.с., к.ф.-м.н. И. Ю. Могильных, в.н.с., д.ф.-м.н. Ф. И. Соловьева)

Код C называется гомогенным, если для любых двух кодовых слов множества их ближайших окрестностей в коде изоморфны. Код называется транзитивным, если его группа автоморфизмов действует транзитивно на кодовых словах. В случае, когда в группе автоморфизмов кода имеется регулярная подгруппа, т.е. ее порядок совпадает с мощностью кода, то такой код называется пропелинейным.
В цикле работ решены две проблемы теории кодирования – проблема существования транзитивных совершенных кодов, не являющихся пропелинейными, и существования гомогенных нетранзитивных совершенных кодов. Тем самым установлена отделимость нескольких важных классов совершенных двоичных кодов, а именно имеет место строгое

содержание класса двоичных линейных совершенных кодов в классе пропелинейных совершенных двоичных кодов, включающихся строго в класс транзитивных совершенных двоичных кодов, которые, в свою очередь, строго содержатся в классе двоичных гомогенных совершенных кодов. Приведен критерий транзитивности совершенных двоичных кодов малого ранга.

Mogilnykh I.Yu., Solov'eva F.I. Transitive nonpropelinear perfect codes // Discrete Math., 2015, Vol. 338, Iss. 3, P. 174-182. DOI: 10.1016/j.disc.2014.11.001
Могильных И. Ю., Соловьева Ф. И. Об отделимости класса гомогенных совершенных двоичных кодов от транзитивных // Пробл. передачи информ., 2015, Том 51, вып. 2, С. 58-67. DOI: 10.1134/S0032946015020054

31. **Получен цикл результатов о строении конечных выпуклых многогранников в R3, в частности, показано, что каждый 3-многогранник с минимальной степенью 5 содержит 7-цикл с максимальной степенью вершин не более 15, причем оценка 15 неулучшаема и усиливает оценку 359, полученную в 2007г. Мадарашем, Шкрековским и Фоссом** (зав. лаб., д.ф.-м.н. О.В.Бородин, в.н.с., д.ф.-м.н. А.В.Косточка, совместно с в.н.с., к.ф.-м.н. А.О.Иванова (Якутск))

Получен цикл результатов о строении конечных выпуклых многогранников в R3 (3-многогранников): найдены точные верхние оценки для веса 4-цикла и 5-цикла, высоты 6-цикла и 7-цикла, полностью описано комбинаторное строение граней в триангулированных 3-многогранниках, дана верхняя оценка веса окрестности вершины степени 5 в 3-многогранниках с минимальной степенью 5 и полностью описаны 4-звезды при 5-вершинах в таких 3-многогранниках. Попутно доказан или опровергнут ряд зарубежных гипотез 1996-2007 гг.
В частности, полностью описаны 3-грани в плоских триангуляциях: каждая плоская триангуляция содержит грань, степени инцидентных вершин которой мажорируются одним из триплетов (3, 4, 31), (3, 5, 21), (3, 6, 20), (3, 7, 13), (3, 8, 14), (3, 9, 12), (3, 10, 12), (4, 4,\infty), (4, 5, 11), (4, 6, 10), (4, 7, 7), (5, 5, 7), (5, 6, 6), причем ни один из параметров данного описания не допускает улучшения. Тем самым улучшено описание, данное Йендролем (1996) и опровергнута по пяти параметрам известная гипотеза Йендроля (1996). Данная теорема завершает цикл работ в этом направлении, инициированный статьей Лебега 1940 г.
Еще отметим такой результат: каждый 3-многогранник с минимальной степенью 5 содержит 7-цикл с максимальной степенью вершин не более 15, причем оценка 15 неулучшаема и усиливает оценку 359, полученную в 2007 г. Мадарашем, Шкрековским и Фоссом.

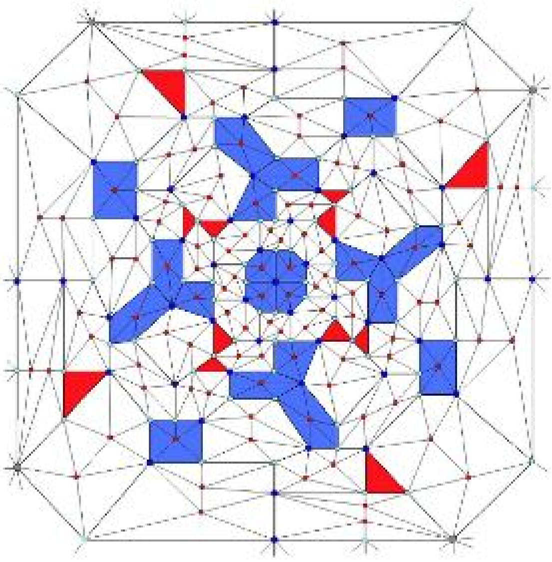


Fig. 1. A half of triangulation justifying (Tc): all minor 4-stars with $w = 30$ are of type (5, 6, 6, 8).

О.В.Бородин, А.О.Иванова, Каждый 3-многогранник с минимальной степенью 5 содержит 7-цикл с максимальной степенью вершин не более 15, Сиб. матем. журнал, 56, 4 (2015) 775--789.

O.V.Borodin, A.O.Ivanova, A.V.Kostochka, Describing faces in plane triangulations, Discrete Math., 319 (2014) 47--61.
O.V.Borodin, A.O.Ivanova, A.V.Kostochka, Every 3-polytope with minimum degree 5 has a 6-cycle with maximum degree at most 11, Discrete Math., 315--316 (2014) 128--134.
О.В.Бородин, А.О.Иванова, Комбинаторное строение граней в триангулированных 3-многогранниках с минимальной степенью 4, Сиб. матем. журнал, 55, 1 (2014) 17--24.
О.В.Бородин, А.О.Иванова, Высота ребра в 3-многограннике, Сибирские электронные матем. известия, 11 (2014) 457--463.
O.V.Borodin, A.O.Ivanova, T.R.Jensen, 5-stars of low weight in normal plane maps with minimum degree 5, Discuss. Math. Graph Theory 34, 3 (2014) 539--546.
O.V.Borodin, A.O.Ivanova, D.R.Woodall, Light C_4 and C_5 in 3-polytopes with minimum degree 5, Discrete Math., 334 (2014) 63--69.
O.V.Borodin, A.O.Ivanova, Describing 3-faces in normal plane maps with minimum degree 4, Discrete Math., 313, 23 (2013) 2841--2847.
O.V.Borodin, A.O.Ivanova, Describing 4-stars at 5-vertices in normal plane maps with minimum degree 5, Discrete Math., 313, 17 (2013) 1710--1714.
O.V.Borodin, A.O.Ivanova, Describing $(d-2)$-stars at d-vertices, $d\le5$, in normal plane maps, Discrete Math., 313, 17 (2013) 1700--1709.
O.V.Borodin, A.O.Ivanova, T.R.Jensen, A.V.Kostochka, M.P.Yancey, Describing 3-paths in normal plane maps, Discrete Math., 313, 23 (2013) 2702--2711.

1.7.1. Физика элементарных частиц и фундаментальных взаимодействий

32. **Предложен новый механизм нарушающего изотопическую инвариантность распада псевдоскалярного \e ta(1405)-мезона в три пиона, обусловленный логарифмической сингулярностью (аномальными порогами Ландау)** (зав. лаб., д.ф.-м.н., профессор Ачасов Н.Н., в.н.с., д.ф.-м.н., доцент Кожевников А.А., в.н.с., д.ф.-м.н., доцент Шестаков Г.Н.)

Теоретически открытое в 1979 году в Институте математики СО АН СССР аномальное нарушение изотопической симметрии в системе лёгких скалярных мезонов в настоящее время интенсивно исследуется экспериментально в Пекине на c-\tau-фабрике. Исследование этих эффектов позволяет изучать как природу лёгких скалярных мезонов, так и динамические механизмы их рождения. Рассматривается открытый в Пекине в 2012 году распад псевдоскалярного \eta(1405)-мезона в три пиона, запрещенного изотопической инвариантностью. Детально обсуждается новый механизм распада \eta(1405)-мезона, обусловленный логарифмической сингулярностью (аномальными порогами Ландау). Сформулированы задачи дальнейших экспериментальных исследований.

PHYSICAL REVIEW D 92, 036003 (2015), 10 стр.,

Важнейшие научные результаты ИМ СО РАН за 2015 год утверждены Ученым советом Института 4 декабря 2015г. Протокол № 5.

Председатель Ученого совета
член-корреспондент РАН С.С. Гончаров

Ученый секретарь Совета
к.ф.-м.н. А.Ф. Воронин