**Важнейшие научные результаты ИМ СО РАН**
**за 2018 год**

## 1.1.1. Алгебра, теория чисел, математическая логика

**1. Описаны простые конечномерные двойные алгебры Ли и ассоциативные двойные алгебры** (с.н.с., к.ф.-м.н. Гончаров М.Е., в.н.с., д.ф.-м.н. Колесников П.С., лаборатория А1)

Двойные алгебры являются разновидностью алгебраических систем с "многозначными" операциями. Они естественным образом возникают в рамках одного из подходов к построению некоммутативной геометрии. В работе доказано, что простые конечномерные двойные алгебры Ли не существуют ни над каким полем, а простые ассоциативные двойные алгебры конечной размерности обязательно коммутативны.

[1] *Goncharov M. E., Kolesnikov P. S.* Simple finite-dimensional double algebras. J. Algebra, 500 (2018), 425–438.

**2. Доказано, что если конечная группа содержит картерову подгруппу, то её обобщённая фиттингова длина ограничена в терминах количества простых делителей порядка этой картеровой подгруппы, тем самым получено обобщение известной теоремы Дейда для неразрешимых групп.** (г.н.с., д.ф.-м.н. Вдовин Е.П., лаборатория А4, совестно с Веньбинь Го (Хэфэй, Китай))

Напомним, что фиттинговой длиной разрешимой конечной группы называется длина её фиттингова ряда, т.е. ряда, в котором каждый фактор является фиттинговой подгруппой. По аналогии можно определить обобщённую фиттингову длину произвольной конечной группы. Фиттингова длина для конечных разрешимых групп и обобщённая фиттингова длина для конечных групп является важным инвариантом, определяющим, насколько сложно устроена группа. Получение оценок на соответствующую длину уже более 60 лет является активно развивающимся направлением в теории конечных групп. В 1969 году Дейд доказал свою знаменитую теорему которая утверждает, что фиттингова длина конечной разрешимой группы ограничена некоторой функцией от количества простых делителей порядка её картеровой подгруппы. Мы показываем, что аналогичный результат справедлив для произвольной группы.

[1] *Wenbin Guo, Vdovin E.P.,* Carter subgroups and Fitting heights of finite groups // Arch. Math., 2018, 110 (2018), N 5, 427-432, DOI:10.1007/s00013-017-1143-z.

**3. Развита теория моделей жёстких разрешимых групп: доказаны полнота и омега-стабильность теории делимых *m*-жёстких групп, описаны насыщенные модели, получена элиминация кванторов до булевой комбинации AE-формул.** (г.н.с., д.ф.-м.н. Романовский Н.С., лаборатория А4, совместно с Мясниковым А.Г. (Технологический Университет Стивенса, США))

Около десяти лет назад автор дал определение класса жёстких разрешимых групп, последний, в частности, содержит свободные разрешимые группы. Была развита алгебраическая геометрия над жёсткими группами, найдена разумная формулировка теоремы Гильберта о нулях и доказана эта теорема.

Представляются новые результаты по теоретико-модельным свойствам жёстких групп. Установлено, что делимые $m$-жёсткие группы являются в точности алгебраически замкнутыми объектами класса всех $m$-жёстких групп. Найдена рекурсивная система аксиом, выделяющая делимые $m$-жёсткие группы, доказаны полнота и омега-стабильность соответствующей теории. Описаны насыщенные модели. Счётная насыщенная модель представлена как предел Фрайссе конечно порождённых $m$-жёстких групп. Получена элиминация кванторов до булевой комбинации $AE$-формул.

[1] *Романовский Н.С.* Делимые жёсткие группы. Алгебраическая замкнутость и элементарная теория, Алгебра и логика, т.56, N 5, 2017, 593-612.
[2] *Мясников А.Г., Романовский Н.С.* Делимые жёсткие группы II. Стабильность, насыщенность и элементарные подмодели, Алгебра и логика, т.57, N 1, 2018, 43-56.

**4. Найдены все конечные простые группы, в которых любая подгруппа нечетного индекса пронормальна и силовская 2-подгруппа содержит свой централизатор.** (в.н.с., д.ф.-м.н. Ревин Д.О., лаборатория А4, совместно с Веньбинь Го (University of Science and Technology of China, Хэфэй, КНР), Кондратьевым А.С. и Масловой Н.В. (ИММ им. Красовкого УрО РАН, Екатеринбург))

Подгруппа H группы G называется пронормальной, если любая подгруппа K, сопряженная с H, сопряжена с ней в подгруппе, порожденной H и K. Пронормальность для подгруппы является обобщением нормальности. Кроме нормальных, пронормальны максимальные подгруппы и (в конечных группах) силовские подгруппы и силовские подгруппы нормальных подгрупп. Пронормальность тесно связана с аргументом Фраттини - одним из наиболее часто используемых в теории конечных групп рассуждений, позволяющих использовать индукцию. Скажем, что для подгруппы H группы G справедлив аргумент Фраттини, если G=NN(H) для любой нормальной подгруппы N в G, содержащей H. Пусть N — нормальная подгруппа в G. Если подгруппа H содержится в N, то H пронормальна в G тогда и только тогда, когда для H справедлив аргумент Фраттини и H пронормальна в N. Это замечание позволяет «поднимать» пронормальность подгрупп группы N в G и показывает, что критической пронормальность является для подгрупп в простых группах. Если в конечной группе силовская p-подгруппа содержит свой нормализатор, то любая ее надгруппа пронормальна. В соответствии с классическим результатом Глаубермана и Томпсона группа G непроста, если для p>3 ее силовская p-подгруппа содержит свой нормализатор. С другой стороны, во многих (но далеко не во всех) простых конечных неабелевых группах силовская 2-подгруппа содержит свой нормализатор, и, как следствие, любая надгруппа такой подгруппы (т. е. любая подгруппа нечетного индекса) пронормальна. Результат состоит в том, что в более широком классе конечных простых групп — группах, где силовская 2-подгруппа содержит свой централизатор, — найдены примеры непронормальных подгрупп нечетного индекса и, более того, полностью классифицированы все случаи когда такие подгруппы встречаются. Напоминаем, что для подгруппы H группы G нормализатор N(H) — это множество всех элементов g из G таких, что подгруппа, сопряженная с H с помощью g, совпадает с H, а централизатор C(H) — это множество всех g из G таких, что для любого x из H элемент, сопряженный с x с помощью g, совпадает с x. При этом C(H) всегда содержится в N(H).

[1] *Кондратьев А.С., Маслова Н.В., Ревин Д.О.* О пронормальности подгрупп нечетного индекса в конечных простых группах, Сиб. матем. журн., **56**:6 (2015), 1375–1383.
[2] *Кондратьев А.С., Маслова Н.В., Ревин Д.О.* Критерий пронормальности добавлений к абелевым нормальным подгруппам, Тр. ИММ УрО РАН, **22**:1 (2016), 153–158.
[3] *Кондратьев А.С., Маслова Н.В., Ревин Д.О.* О пронормальности подгрупп нечетных индексов в конечных простых симплектических группах, Сиб. матем. ж., **58**:3 (2017), 599–610.
[4] *Го В., Маслова Н.В., Ревин Д.О.* О пронормальности подгрупп нечетных индексов в некоторых расширениях конечных групп, Сиб. матем. журн., **59**:4 (2018), 773–790.
[5] *Кондратьев А.С., Маслова Н.В., Ревин Д.О.* О пронормальных подгруппах в конечных простых группах, Доклады Академии Наук, **482**:1 (2018); перевод *A.S. Kondratev, N.V. Maslova and D.O.Revin,* On Pronormal Subgroups in Finite Simple Groups, Doklady Mathematics, **98**:2 (2018), 405–409.

**5. Завершено описание спектров конечных простых групп.** (с.н.с., к.ф.-м.н. Бутурлакин А.А., лаборатория А4)

Порядком элемента $g$ конечной группы называется наименьшее натуральное число $n$ такое, что $gn$=1. Множество всех порядков элементов группы называется её спектром. Спектр замкнут относительно взятия делителей, т.е. если $n$ – это элемент спектра и $d$ – её делитель, то $d$ также лежит в спектре. Таким образом, спектр однозначно задается любым подмножеством, содержащим максимальные по делимости элементы спектра. Если для группы указано такое подмножество, то будем говорить, что её спектр известен (или описан).

Конечные простые группы лиева типа E8 были последней серией конечных простых групп, для которой не было описания спектров. Таким образом, полученный результат завершает описание спектров конечных простых групп.

Необходимость в информации о спектрах конечных простых групп возникает при решении различных задач теории групп. Например, при решении задачи распознаваемости конечной простой группы по спектру. Многие алгоритмы, применяемые при вычислениях в конечных

группах, используют случайные выборки элементов данной группы. Как правило самая доступная информация об этих элементах — это их порядки. Поэтому многие алгоритмы включают анализ множества порядков построенных элементов. Большое значение для вычислений в конечных группах имеет задача распознавания данной конечной простой группы, заданной порождающим множество элементов. При решении этой задачи активно используется описанный подход. В частности, при определении четности/нечетности характеристики, определении точного значения нечетной характеристики. Отметим, что в последнем случае базовым является факт, установленный Кантором и Серешем в 2009 г. и состоящий в том, что характеристика поля определения группы лиева типа над полем нечетной характеристики однозначно определяется тремя максимальными элементами её спектра. При этом, значительная часть их работы посвящена изучению порядков полупростых элементов.
В заключение заметим, что есть другие важные классы конечных групп близких к простым (квазипростые, почти простые группы), которые часто возникают в различных ситуациях и знание спектров которых было бы также полезно. Эта задача также решается, например, известны спектры всех универсальных групп лиева типа. Однако, она далека от завершения.

[1] *Бутурлакин А.А*. Спектры групп E8(q), Алгебра и логика, **57**:1 (2018), 3-13.
[2] *Бутурлакин А.А*. Спектры конечных простых групп E7(q), Сиб. матем. Журн., **57**:5 (2016), 988–998.
[3] *Бутурлакин А.А*. Спектры конечных простых групп E6(q) и 2E6(q), Алгебра и логика, **52**:3 (2013), 284–304.

**6. В классе сильно коатомных решеток получена характеризация решеток, изоморфных решеткам замкнутых подмножеств выпуклых геометрий** (в.н.с., д.ф.-м.н. Швидефски М.В., лаборатория Л1)

Известная и до сих пор не решенная проблема, поставленная Р.П. Дилуорсом в 60-х годах прошлого века, ставит вопрос о нахождении внутренней характеризации полных решеток, каждый элемент которых имеет единственное несократимое представление в виде объединения вполне неразложимых элементов. Известно, что в конечном случае класс таких решеток совпадает с классом решеток замыканий конечных выпуклых геометрий. Получено описание сильно коатомных решеток, изоморфных решеткам замкнутых подмножеств выпуклых геометрий в терминах существования разложений, а также в других терминах. Это описание решает проблему Дилуорса для целого ряда классов полных решеток.

[1] *Швидефски М.В*. Разложения в полных решетках. III. Единственные несократимые разложения и выпуклые геометрии, Алгебра и логика, 2017, т.56, No 5, с.613-635

**7. Построена семантика реализуемости для логики Хинтикки с независимыми кванторами.** (в.н.с., д.ф.-м.н. Одинцов С.П., лаборатория Л1, совместно с Сперанским С.О. (СПбГУ), Шевченко И.Ю. (НГУ))

Отличие синтаксиса логики Хинтикки с независимыми кванторами (IF-логики) от логики первого порядка (FOL) состоит в том, что подкванторные переменные заменяются на выражения вида $x\backslash X$, где $x$ - индивидная переменная, а $X$ - конечное множество индивидных переменных, смысл которых состоит в том, что выбор значения переменой $x$ должен осуществляться независимо от значений переменных из множества $X$.  Данная модификация приводит к значительному росту выразительных возможностей логики и неожиданным с точки зрения оснований математики следствиям, например, в языке IF-логики можно выразить предикат истинности для предложений IF-логики. Вместе с тем IF-логика сохраняет такие важные свойства FOL как компактность, свойство Бета, теорема Левенгейма Сколема, теорема об отделении и т.д.
В данной работе впервые систематически исследуется связь IF-логики с конструктивными семантиками и исследуется возможность построения для нее BHK-интерпретации (данное название объединяет различные конструктивные семантики, берущие начало от задачной интерпретации интуиционистской логики А.Н. Колмогорова). Доказано, что семантика реализуемости по Нельсону представляет собой конструктивную версию теоретико-игровой семантики (GTS) для FOL. Построена семантика реализуемости, являющая конструктивной версией GTS для IF-логики. Доказано, что семантика IF-реализуемости консервативным образом расширяет реализуемость по Нельсону. Таким образом, расширен набор хороших свойств IF-

логики (наличие конструктивной семантики) и установлено наличие тесной связи между двумя направлениями исследований, которые развивались ранее независимо друг от друга.

[1] *Odintsov S.P., Speranski S.O., Shevchenko I.Yu.* Hintikka's Independence Friendly Logic Meets Nelson's Realizability, Studia Logica, 2018, V.106 (3), pp.637-670. DOI:10.1007/s11225-017-9760-x

**8. Найдено достаточное условие для существования континуума подквазимногообразий, не имеющих независимого базиса квазитождеств.** (в.н.с., д.ф.-м.н. Швидефски М.В., с.н.с., к.ф.-м.н. Кравченко А.В., оба лаборатория Л1, совместно с Нуракуновым А.М. (Института математики НАН Кыргызстана, Бишкек, Кыргызстан))

Найдено достаточное условие, гарантирующее высокую сложность решетки подквазимногообразий, в терминах существования специального подкласса систем. При выполнении этого условия квазимногообразие K является Q-универсальным и содержит континуум подквазимногообразий, не имеющих покрытий в решетке подквазимногообразий и, следовательно, независимого базиса квазитождеств в K. Полученное условие имеет весьма широкий спектр применения.

[1] *Кравченко А.В., Нуракунов А.М., Швидефски М.В.* О строении решеток квазимногообразий. I. Независимая базируемость, Алгебра и логика, т. 57 (2018), № 6.

**9. Построено допустимое множество, имеющее вычислимое представление но задающее более высокую степень вычислимости.** (в.н.с., д.ф.-м.н. Пузаренко В.Г., лаборатория Л1, совместно с Авдеевым Р.Р. (НГУ))

Допустимые множества задают естественные обобщения классической вычислимости и являются также весьма естественными объектами для изучения различных видов вычислимости над абстрактными структурами. Классическая вычислимость над натуральными числами является самой слабой, наименьшей среди них. В работе построен в некотором смысле парадоксальный пример допустимого множества H, имеющего вычислимое представление как алгебраическая структура, но задающего более высокую степень вычислимости, чем классическая вычислимость над натуральными числами (что равносильно тому, что имеется структура, имеющая эффективное представление относительно H, но не имеющая вычислимых представлений).

[1] *Авдеев В.Г., Пузаренко В.Г.,* Вычислимая структура с нестандартной вычислимостью, Математические труды, **21**:2 (2018), 3-60.

**10. Установлено существование вычислимой структуры, имеющей нестрогую степень категоричности. Построена разрешимая структура, не имеющая степени автоустойчивости относительно сильных конструктивизаций.** (с.н.с., к.ф.-м.н. Баженов Н.А., лаборатория Л2, совместно с Калимуллиным И.Ш. и Ямалеевым М.М. (оба Казанский федеральный университет))

Тьюрингова степень d есть степень категоричности вычислимой структуры S, если d – это наименьшая из степеней, могущих вычислять изоморфизм между произвольными вычислимыми копиями S. Степень категоричности d является строгой, если существуют вычислимые представления A и B структуры S, для которых любой изоморфизм между ними вычисляет d. Построен первый пример вычислимой структуры, имеющей нестрогую степень категоричности: существует вычислимый жёсткий граф, имеющий нестрогую степень категоричности 0'. Тем самым решён открытый вопрос Е.Б. Фокиной, И.Ш. Калимуллина и Р. Миллера (2010). Также доказано, что существует разрешимая структура M, для которой спектр автоустойчивости относительно сильных конструктивизаций равен множеству всех PA-степеней. В частности, M не имеет степени автоустойчивости относительно сильных конструктивизаций.

[1] *Bazhenov N.* Autostability spectra for decidable structures // Mathematical Structures in Computer Science. 2018. Vol.28, no.3. P.392-411.
[2] *Bazhenov N.A., Kalimullin I.Sh., Yamaleev M.M.* Degrees of categoricity and spectral dimension // Journal of Symbolic Logic. 2018. Vol.83, no.1. P. 103-116.

**11. Получен ответ на вопрос С.Д.Фридмана: установлена точная оценка числа Ханфа для вычислимых структур.** (директор, академик РАН Гончаров С.С., лаборатория Л2, совместно с Найт Дж. (Notre Dame University) и Солдатос И. (University of Detroit Mercy)).

Числом Ханфа (*Hanf number*) для множества предложений S в языке с бесконечными конъюнкциями и дизъюнкциями $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$ (или в других логиках) называется наименьший кардинал $\kappa$ такой, что для всех предложений $\varphi \in S$, если $\varphi$ имеет модели во всех бесконечных кардиналах $\kappa$, то существуют модели во всех бесконечных кардиналах. Д. Скотт показал, что для любой счетной структуры $\mathcal{A}$ языка с бесконечными дизъюнкциями и конъюнкциями счетной сигнатуры существует предложение языка $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$, у которого счетная модель является изоморфной копией структуры $\mathcal{A}$. Такое предложение называется предложением Скотта (*Scott sentence*) для $\mathcal{A}$.
Морли и Лопес - Эскобар показали, что для любого счетного множества предложений языка с бесконечными дизъюнкциями и конъюнкциями $\Gamma$, если $\Gamma$ имеет модели для кардиналов $\beth_\alpha$ для всех $\alpha < \omega_1$, то она имеет модели для всех бесконечных кардиналов.
Сай Фридман поставил вопрос, о числе Ханфа для вычислимых структур.
Нами доказано, что число Ханфа для предложений Скотта вычислимых структур равно точно $\beth_{\omega_1^{CK}}$, где $\omega_1^{CK}$ - первый невычислимый ординал. Аналогичные аргументы показывают, что $\beth_{\omega_1^{CK}}$ является числом Ханфа и для гиперарифметических структур.

[1] *Goncharov S.S., Knight J.F., Souldatos I.* Hanf number for Scott sentences of computable structures // Archive for Mathematical Logic, 2018, Vol.57, Issue 7-8, P.889-907.

**12. Вычислены инварианты простой исключительной группы типа $G_2$ и спинорной группы Spin(7), действующих диагонально на нескольких копиях пространства октонионов, над бесконечным полем нечетной характеристики** (в.н.с., д.ф.-м.н. Зубков А.Н., ОФИМ, г.н.с., д.ф.-м.н. Шестаков И.П., лаборатория А1)

Стандартным пространством представления для исключительной простой группы типа $G_2$ и спинорной группы Spin(7) является алгебра октонионов O. При этом оно самодуально, поэтому можно говорить только о инвариантах диагонального действия этих групп на нескольких копиях O. В 1988 году Шварц нашел порождающие инварианты этого действия, но только над полем нулевой характеристики. Позднее теорема Шварца была передоказана Ильтяковым и Хауи (Howe) другими методами. Однако аналогичная проблема над полем положительной характеристики оставалась открытой более 30 лет.
В нашей работе мы доказываем, что порождающие, найденные Шварцем, остаются таковыми и над любым бесконечным полем нечетной положительной характеристики. В доказательстве используется теория модулей с хорошей фильтрацией, модулярный вариант двойственности Хауи, развитый недавно Адамовичем и Рыбниковым с помощью теории наклоняющих (tilting) модулей, элементы теории луп Муфанг и изящный комбинаторный трюк, который собственно и позволил разложить произвольный инвариант в сумму произведений инвариантов степени не выше четырех. Более точно, проблема заключалась в том, что вся вышеупомянутая мощная техника способна вычислить порождающие алгебры инвариантов только как векторного пространства, но не как алгебры. Кроме того, запись этих порождающих была настолько сложна, что не поддавалась никакому комбинаторному анализу. Наш результат – вероятно, первый нетривиальный результат в модулярной теории инвариантов простых исключительных групп за последние 30 лет.

[1] *Zubkov A.N., Shestakov I.P.* Invariants of G_2 and Spin(7) in positive characteristic // Transformation Groups, **23**:2 (2018), 555-588.

**1.1.2. Геометрия и топология**

**13. Получена оценка снизу на стекловские дзета-инварианты плоской области и доказана компактность в $C^\infty$-топологии семейства плоских областей с совпадающими стекловскими спектрами.** (г.н.с., д.ф.-м.н. Шарафутдинов В.А., лаборатория Г3, совместно с Alexandre Jollivet (Universite des Lille, France))

В 1903 г. Стеклов, рассматривая некоторую задачу гидродинамики, ввел в рассмотрение собственные числа соответствующей краевой задачи, позднее получивших название стекловских собственных чисел области (а их совокупность – стекловским спектром области). Насколько однозначно ограниченная область евклидова пространства определяется своим стекловским спектром? Жоливье и Шарафутдиновым была получена оценка снизу на стекловские дзета-инварианты и на основании этой оценки доказана компактность в $C^\infty$-топологии семейства плоских областей с совпадающими стекловскими спектрами. Тем самым дан положительный ответ на вопрос, поставленный Эдвардом в 1993 г.

[1] *Alexandre Jollivet and Vladimir Sharafutdinov*. Steklov zeta-invariants and a compactness theorem for isospectral families of planar domains // Journal of Functional Analysis, 2018, Vol. 275, no. 7, 1712-1755. DOI:10.1016/j.jfa 2018.06.019

**14. Предложен и применен метод вычисления кривизн однородных субримановых многообразий на основе естественного инвариантного оснащения вполне неголономного распределения.** (в.н.с., д.ф.-м.н. Берестовский В.Н., лаборатория Г1)

Предложены естественные условия выбора инвариантного оснащения инвариантного вполне неголономного распределения, определяющего вместе с заданным на нем инвариантным скалярным произведением субриманову метрику на однородном пространстве группы Ли по ее компактной подгруппе. Тогда секционные, риччиевы и скалярные кривизны распределения по А.Ф. Соловьеву не зависят от выбора инвариантного скалярного произведения на оснащении в предположении, что распределение и оснащение ортогональны. Автор принимает, что эти кривизны и есть кривизны рассматриваемого субриманова многообразия. Подход применим для контактных распределений, трехмерных групп Ли, групп Карно, полупростых связных групп изометрий симметрических римановых многообразий и других случаев.

[1] *Berestovskii V.N.* Curvatures of homogeneous sub-Riemannian manifolds // European Journal of Mathematics. 2017. Vol. 3, № 4. P. 788-807.
[2] *Берестовский В.Н.* Геодезические и кривизны специальных субримановых метрик на группах Ли // Сиб. мат. журн. 2018. Т. 59, № 1. С. 41-55.

### 1.1.3. Математический анализ

**15. Разработана теория новой шкалы пространственных отображений, зависящей от двух вещественных параметров *q* и *p* и весовой функции θ.** (г.н.с., д.ф.-м.н. Водопьянов С.К., лаборатория Г1)

Отображения двухиндексной шкалы принадлежат классу Соболева $W^1_{n-1,\mathrm{loc}}(\Omega)$ и задаются некоторым ограничением на внутренний коэффициент искажения. Заметим, что отображения класса Соболева $W^1_{n-1,\mathrm{loc}}(\Omega)$ не обладают многими привычными в квазиконформном анализе свойствами: дифференцируемостью, $N$-свойством Лузина, $N^{-1}$-свойством Лузина и др. Поэтому доказательства основных утверждений работы новые. Приведем основные из них.
1) Мы определяем обобщенную функцию Полецкого и устанавливаем для нее свойства регулярности [1, теорема 18].
2) Результат п. 1 и метод его доказательства служит основой при вывода оценок для перенесенных функций [1, теоремы 28 и 32; 2, теоремы 17 и 24].
3) В качестве одного из следствий мы получаем оценку для емкости перенесенного конденсатора [1, теорема 34].
4) Оценка для емкости перенесенного конденсатора позволяет установить теоремы о затираемых особенностях [1, теорема 45], доказать теоремы типа Лиувилля [2, теорема 32], и классифицировать римановы многообразия [2, теорема 39], а также доказать дифференцируемость отображений нового класса [2, теорема 26].

[1] *Водопьянов С.К.* Основы квазиконформного анализа двухиндексной шкалы пространственных отображений // Сиб. мат. журн., 2018. Т. 59. №5. Р. 805- 834.
[2] *Водопьянов С.К.* О дифференцируемости отображений класса Соболева $W^1_{n-1}$ с условиями на функцию искажения // Сиб. мат. журн., 2018. Т. 59. №6. Р. 1240 -1267.

**16. Показано, что эргодическая теорема фон Неймана является утверждением об асимптотике роста сумм Фейера. Это привело к доказательству как новых оценок скоростей сходимости в указанной эргодической теореме, так и новых оценок сумм Фейера.** (в.н.с., д.ф.-м.н. Качуровский А.Г., с.н.с., к.ф.-м.н. Подвигин И.В., оба – лаборатория Г2, совместно с Книжовым К.И. (НГУ))

Суммы Фейера периодических мер и нормы отклонений от предела в эргодической теореме фон Неймана вычисляются по одним и тем же формулам (интегрированием ядер Фейера) — так что сама эта эргодическая теорема фактически является утверждением об асимптотике роста сумм Фейера в точке 0 спектральной меры соответствующей динамической системы. Это дает возможность перерабатывать известные оценки скоростей сходимости в эргодической теореме фон Неймана в оценки сумм Фейера в точке для периодических мер — например, так удалось получить естественные критерии степенного роста и степенного убывания этих сумм. И наоборот, имеющиеся в литературе многочисленные оценки уклонений сумм Фейера в точке позволяют получать оценки скоростей сходимости в этой эргодической теореме.

[1] *Качуровский А.Г., Книжов К.И.* Уклонения сумм Фейера и скорости сходимости в эргодической теореме фон Неймана // Докл. РАН, 2018. Т. 480, № 1. С. 21-24.
[2] *Kachurovskii A.G., Podvigin I.V.* Fejer sums for periodic measures and the von Neumann ergodic theorem // Dokl. Math. 2018. Vol. 98, No 1. pp. 344-347. Перевод статьи: *Качуровский А.Г., Подвигин И.В*. Суммы Фейера периодических мер и эргодическая теорема фон Неймана // Докл. РАН, 2018. Т. 481. № 4.

**17. Определена структура группы якобиана циркулянтных графов и их естественных обобщений. В качестве следствия, найдена функция сложности указанных семейств, получена асимптотика и изучены ее арифметические свойства.** (г.н.с., д.ф.-м.н. Медных А.Д., н.с., к.ф.-м.н. Медных И.А., оба – лаборатория У6, совместно с Йонг Су Квон (Йонгнамский университет, Южная Корея))

Якобианом связного конечного графа называется его максимальный абелева группа, порожденная потоками, удовлетворяющими первому и второму законам Кирхгофа. Порядок этой группы совпадает с числом порождающих деревьев (или сложностью) графа. Классическая теорема Кирхгофа утверждает, что сложность равна произведению ненулевых собственных значении оператора Лапласа графа, поделенному на число его вершин. Таким образом, сложность — это спектральная свойство графа. В тоже время, существуют графы с одинаковыми спектрами и разными якобианами.
Авторами разработаны новые методы для вычисления группы якобианов для семейств графов, обладающих циклической группой симметрий большого порядка. В частности, подобным свойством обладают циркулянтные графы и обобщенные графы Петерсона.
Следует отметить, что циркулянтных графов близкие по духу результаты независимо и другими методами получены в работах китайских математиков. Предложенный авторами подход представляется более простым и удобным. Он позволяет получить формулы для функции сложности в замкнутом виде и детально исследовать ее арифметические свойства. Кроме того, явный вид полученной формулы позволяет найти ее асимптотику через геометрические параметры графа и меру Малера его сопровождающего полинома.

[1] *Y.S. Kwon, A.D. Mednykh, I.A. Mednykh*. On Jacobian group and complexity of the generalized Petersen graph GP(n,k) through Chebyshev polynomials // Linear Algebra and its Applications, 2017, Vol. 529, 355-373.
[2] *А.Д. Медных, И.А. Медных*. О строении группы якобиана циркулянтных графов //
Доклады Академии Наук, 2016, том 469, № 5, с. 1–5.
[3] *I.A. Mednykh*, On Jacobian group and complexity of the I-graph I(n,k,l) through Chebyshev polynomials // Ars Mathematica Contemporanea, 2018, Vol. 15, 467-485.

### 1.1.4. Дифференциальные уравнения и математическая физика

**18. Построена новая дискретная модель одномерных уравнений гидродинамики без диссипативных членов, которая предсказывает образование разрывов волн разрежения и**

**рост энтропии.** (г.н.с., академик РАН Годунов С.К., лабораатрия Д6, совместно с Ключинским Д.В. (НГУ), Сафроновым А.В. (Центральный научно-исследовательский институт машиностроения), Фортовой С. В. и Шепелевым В.В. (оба – Институт автоматизации проектирования РАН))

Построена новая частично линеаризованная редакция классической схемы Годунова с нелинейными распадами, в которой распады заменены их упрощенными вариантами. Предлагаемый вариант схемы не обладает диссипативными членами, однако обеспечивает гарантированное неубывание энтропии на разрывах, что было численно проверено на многочисленных расчетах задач с ударными волнами и распадами разрывов. Показано, что решение задач с разрывами по предложенной схеме на мелких сетках не приводит к каким-либо сложностям или неожиданным эффектам. Расчеты, проводившиеся на различных сетках одной и той же задачи, демонстрируют сходимость решений к кусочно-гладким функциям с разрывами, моделирующими ударные волны. Приведены зависимости ширины ударных волн и времени их образования от выбора числа Куранта и шага расчетной сетки.

[1] *Godunov S.K., Klyuchinskii D.V., Fortova S.V., Shepelev V.V.* Experimental Studies of Difference Gas Dynamics Models with Shock Waves // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2018, Vol. 58, Issue 8, Pages 1201-1216.
[2] *Godunov S.K., Klyuchinskiy D.V., Safronov A.V., Fortova S.V., Shepelev V.V.* Experimental study of numerical methods for the solution of gas dynamics problems with shock waves // Journal of Physics: Conference Series. 2018, Vol. 946, Issue 1, 012048. DOI:10.1088/1742-6596/946/1/012048
[3] *Годунов С.К., Ключинский Д.В., Фортова С.В., Шепелев В.В.* Экспериментальные исследования разностных моделей газовой динамики с ударными волнами // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2018, Т. 58, №12.

**19. Для двумерного случая доказана локальная по времени теорема существования и единственности в пространствах Соболева решения задачи со свободной границей для контактного магнитогидродинимического разрыва при условии, что в начальный момент времени в каждой точке разрыва выполнено условие Рэлея-Тейлора на знак скачка производной давления по направлению нормали к разрыву.** (г.н.с., д.ф.-м.н. Трахинин Ю.Л., лаборатория Д3, совместно с Морандо А. и Требески П. (Италия))

На контактном разрыве в магнитной гидродинамике идеальной сжимаемой жидкости непрерывны давление, скорость и магнитное поле в то время, как плотность и энтропия могут иметь произвольный скачок. Граничные условия для контактных разрывов – наиболее типичные в космической плазме. Напри-мер, контактные разрывы наблюдаются за ударными волнами, ограничивающими остатки сверхновой.
Для двумерного случая доказана локальная по времени теорема существования и единственности в пространствах Соболева решения задачи со свободной гра-ницей для контактного разрыва при условии, что в начальный момент времени в каждой точке разрыва выполнено условие Рэлея-Тейлора $[\partial p/\partial N]<0$ на знак скачка производной давления по направлению нормали к разрыву.

РИС: Пальцевые структуры неустойчивости Рэлея-Тейлора, видимые в по контурам Крабовидной туманности (остатка сверхновой SN 1054)

[1] *Morando A., Trakhinin Y., Trebeschi P*. Well-posedness of the linearized problem for MHD contact discontinuities // J. Differential Equations, **258** (2015), 2531-2571.
[2] *Morando A., Trakhinin Y., Trebeschi P*. Local existence of MHD contact discontinuities // Arch. Ration. Mech. Anal., **228** (2018), 691-742.

**20. Развита теория релаксации интегральных функционалов с приложениями к теории сильных материалов.** (с.н.с., к.ф.-м.н. Сычев М.А., лаборатория Д4, совместно с Mandallena J.-P. (Франция))

Недавно М.А. Сычевым было показано, что для полунепрерывности снизу интегрального функционала с *p*-коэрцитивным интеграндом, принимающим значения в расширенном множестве вещественных чисел $\overline{R}$, необходимым и достаточным условием является *p*-квазивыпуклость и выполнение так называемого условия (M). Последнее условие состоит в том, что при приближении линейной функции последовательностью соболевских функций в слабой топологии эту последовательность можно заменить на последовательность с линейными граничными данными, не увеличив в пределе значение энергии. В настоящей работе, выполненной Сычевым совместно с французским математиком Мандалленой, развита теория релаксации (построения полунепрерывных снизу оболочек исходных интегральных функционалов) при выполнении условия (M). Оказывается, верна более простая теория релаксации, чем в общем случае. Полученные результаты применяются в конкретных ситуациях, в частности, к теории сильных материалов.

[1] *Mandallena, J.-P., Sychev, M.* New relaxation theorems with applications to strong materials // Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics, Volume 148, Issue 5, 2018, pp. 1029−1047.

**21. Выделен класс сверхустойчивых линейных гиперболических систем. Установлено, что при малых возмущениях младших коэффициентов такие системы остаются экспоненциально устойчивыми, и найдены условия, при которых возмущенные системы обладают свойством повышения гладкости решений.** (с.н.с., к.ф.-м.н. Люлько Н.А., лаборатория Д4, совместно с I. Kmit (Институт Гумбольдта, Берлин, Германия))

Линейное дифференциальное уравнение $u'(t) = A(t)u(t)$ в банаховом пространстве $X$ называется *сверхустойчивым (superstable)*, если для любого $\gamma > 0$ существует такое $M(\gamma) \geq 1$, что при $t \geq 0$ для всех решений справедлива оценка $||u(t)|| \leq M(\gamma)\exp(-\gamma t)||u(0)||$. Это понятие введено в 1999 году известным математиком А. Балакришнаном. Им же был поставлен вопрос о существовании реальных моделей, обладающих свойством сверхустойчивости, а также об исследовании их свойств. Ответу на этот вопрос посвящена работа Н.А. Люлько совместно с зарубежным соавтором Ириной Кмит. Выделен класс гиперболических начально-краевых задач в полуполосе $\{(x,t) : 0 < x < 1, t > 0\}$, все решения которых стабилизируются к нулю за конечное время. Установлено, что при малых возмущениях младших коэффициентов такие системы остаются экспоненциально устойчивыми, а также найдены условия, при которых возмущенные системы обладают свойством повышения гладкости решений.

[1] *I. Kmit, N. Lyul'ko*. Perturbations of superstable linear hyperbolic systems // Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2018, Vol. 460, Issue 2, P. 838−862.

**22. Изучена регулярность обобщенных решений анизотропных параболических уравнений.** (с.н.с., к.ф.-м.н. Терсенов А.С., лаборатория Д4, совместно с Alkis Tersenov (Университет Крита, Греция))

Параболические уравнения вида

$$u_t = \sum_{i=1}^{n} (|u_{x_i}|^{p_i-2} u_{x_i})_{x_i} + g(t,x,u,\nabla u)$$

с анизотропным аналогом *p*-лапласиана в главной части, где $p_i > 1$, имеют многочисленные приложения и активно изучаются мировым научным сообществом. Однако вопрос о гладкости обобщенных решений до сих пор остается открытым. Этот вопрос рассмотрен в совместной работе Ар.С. Терсенова и Ал.С. Терсенова. Для анизотропных уравнений без младших членов описан класс начальных данных, при которых первая начально-краевая задача имеет единственное обобщенное решение с ограниченной производной по времени, а производные по пространственным переменным принадлежат соболевским пространствам. При дополнительных условиях на геометрию области доказано существование и единственность непрерывного по Липшицу обобщенного решения. В сингулярном случае $1 < p_i < 2$ удалось показать, что решения задачи Коши обладают еще большей гладкостью по пространственным переменным.

[1] *Al. Tersenov, Ar. Tersenov.* Existence of Lipschitz continuous solutions to the Cauchy–Dirichlet problem for anisotropic parabolic equations // Journal of Functional Analysis, 2017, v. 272, № 10, p. 3965−3986.

**23. Доказано существование периодических траекторий для нечетномерных блочно-линейных динамических систем. Установлены условия единственности периодического решения.** (г.н.с., д.ф.-м.н. Голубятников В.П., лаборатория У3, с.н.с., к.ф.-м.н. Иванов В.В., лаборатория Д5)

Для нечетномерных блочно-линейных динамических систем, моделирующих кольцевые генные сети, установлены необходимые и достаточные условия существования цикла. При этих условиях построен инвариантный тор, содержащий внутри себя циклическую траекторию системы. Изучены перестройки фазовых портретов таких систем в зависимости от их параметров. Установлены условия единственности цикла.

[1] *Голубятников В.П., Кириллова Н.Е.* О циклах в моделях функционирования кольцевых генных сетей // Сибирский журнал чистой и прикладной математики. 2018. Т. 18, № 1. С. 54-63.
[2] *Голубятников В.П., Иванов В.В., Минушкина Л.С.* О существовании цикла в одной несимметричной модели кольцевой генной сети. // Сибирский журнал чистой и прикладной математики. 2018. Т. 18, № 3. С. 26-32.
[3] *Голубятников В.П., Иванов В.В.* Циклы в нечетномерных моделях кольцевых генных сетей // Сибирский журнал индустриальной математики. 2018. Т. 21, № 4. С. 28-38.

### 1.1.5. Теория вероятностей и математическая статистика

**24. Получена оценка типа Берри-Эссеена для суммы случайных величин, заданных на цепи Маркова с абстрактным фазовым пространством.** (г.н.с., д.ф.-м.н. Нагаев С.В., лаборатория Г1)

В работе оценивается точность нормального приближения для распределения случайных величин, заданных на общей цепи Маркова. Больтхаузен (1980) получил оценку $O(n^{-1/2})$ в центральной предельной теореме для неравномерно эргодичных цепей с общим фазовым пространством, где $n$-число слагаемых. При этом он использовал технику расщепления исходного фазового пространства, принадлежащую Нуммелину (1978). Оценка Больтхаузена учитывает только зависимость точности приближения от $n$. Напротив, наша оценка, наряду с абсолютной константой, включает параметры, связанные с эргодическими свойствами цепи Маркова. Заметим также, что наша оценка справедлива для любого начального распределения, тогда Больтхаузен ограничивается случаем стационарной цепи Маркова. Следует отметить, что, в отличие от Больтхаузена, мы не используем метод расщепления, наш подход является чисто аналитическим.

[1] *Nagaev S.V.* The Berry-Essen bound for general Markov chains // Journal of Mathematical Sciences, 2018, Vol. 234, No. 6, p. 829-846.

**25. Получены новые оценки неизвестного параметра распределения выборки в случае разрывных плотностей.** (г.н.с., академик РАН Боровков А.А., лаборатория В1)

Рассматривается статистическая задача об оценивании неизвестного параметра $\theta$ распределения в случае, когда плотность распределения элементов выборки X объема $n$ из этого распределения имеет, по крайней мере, одну зависящую от $\theta$ точку разрыва. Предполагается, что либо (а) из априорных соображений можно указать локализацию параметра $\theta$, удовлетворяющую легко проверяемым условиям, либо (б) существует состоятельная оценка $\theta^*$ параметра $\theta$ (построенная, возможно, по той же выборке X), что также дает некоторую локализацию. В этих условиях строится семейство явных оценок, допускающих при достаточно больших $n$ экспоненциальные оценки точности порядка $1/n$. Это семейство позволяет строить асимптотически оптимальные оценки при произвольной функции потерь (не обязательно квадратичной, соответствующей дисперсии оценки). При выполнении соответствующих условий установлена асимптотическая эквивалентность получаемых оценок оценке максимального правдоподобия. При этом никаких условий гладкости на плотность распределения наблюдений не накладывается. Изучено также предельное распределение получаемых оценок. Оно не является нормальным.

[1] *Боровков А.А.* Об оценивании параметров в случае разрывных плотностей. Теория вероятностей и ее применения, 2018, т. 63, вып. 2, с. 211-239. DOI:10.4213/tvp5116

**26. Доказаны интегро-локальные теоремы для обобщенных процессов восстановления при моментном условии Крамера.** (г.н.с., академик РАН Боровков А.А., г.н.с., д.ф.-м.н. Могульский А.А., аспирант Прокопенко Е.И., все – лаборатория В1)

Установлены интегро-локальные предельные теоремы для обобщенных процессов восстановления (о.п.в.), в которых изучается асимптотика вероятности того, что траектория процесса попадет в «малый» куб, расположенный в т.н. крамеровской зоне уклонений. Получен ряд результатов и для т.н. нерегулярных уклонений. Все эти результаты являются основанием и важнейшим инструментом при решении целого ряда сложных задач, таких, например, как задача о вероятностях больших уклонений о.п.в., задача о пересечении траекторией о.п.в. удаленной криволинейной границы и др. Эти задачи актуальны в целом ряде приложений, связанных, например, с теорией коммуникационных сетей, теорией очередей, теорией страхования.

[1] *Боровков А.А., Могульский А.А.* Интегро-локальные предельные теоремы для обобщенных процессов восстановления при выполнении условия Крамера. I. Сибирский математический журнал, 2018, т.59, №3, 491-513.
DOI: https://doi.org/ 10.17377/smzh.2018.59.302.
[2] *Боровков А.А., Могульский А.А.* Интегро-локальные предельные теоремы для обобщенных процессов восстановления при выполнении условия Крамера. II. Сибирский математический журнал, 2018, т.59, №4, 736-758.
DOI: https://doi.org/10.17377/smzh.2018.59.402.
[3] *А.А. Могульский, Е.И. Прокопенко*. Интегро-локальные предельные теоремы для многомерных обобщенных процессов восстановления при моментном условии Крамера. I. Сибирские электронные математические известия. 2018, т.15, 475-502.
DOI 10.17377/semi.2018.15.041.
[4] *А.А. Могульский, Е.И. Прокопенко*. Интегро-локальные предельные теоремы для многомерных обобщенных процессов восстановления при моментном условии Крамера. II. Сибирские электронные математические известия, 2018, т.15, 503-527.
DOI 10.17377/semi.2018.15.042.
[5] *А.А. Могульский, Е.И. Прокопенко*. Интегро-локальные предельные теоремы для многомерных обобщенных процессов восстановления при моментном условии Крамера. III. Сибирские электронные математические известия, 2018, т.15, 528-553.
DOI 10.17377/semi.2018.15.043.

### 1.1.6. Вычислительная математика

**27. Исследовано применение параболического, кубического и экспоненциального сплайнов для интерполяции функций с большими градиентами в пограничном слое. Получены оценки погрешности интерполяции, равномерные по малому параметру** (в.н.с., д.ф.-м.н. Задорин А.И., ОФИМ, совместно с д.ф.-м.н. Блатовым И.А. (ПГУТИ) и к.ф.-м.н. Китаевой Е.В. (Самарский университет)

Актуальна задача построения сплайнов для функций с большими градиентами в пограничном слое. Погрешность сплайнов должна быть равномерной по большим градиентам интерполируемой функции в пограничном слое, что выражается в независимости оценки погрешности от возмущающего параметра $\varepsilon$, $\varepsilon>0$. Доказано, что погрешность интерполяции кубическим сплайном и параболическим сплайном по Субботину в случае равномерной сетки неограниченно растет с уменьшением малого параметра ε. Для кубического сплайна и параболического сплайна по Субботину в случае применения сетки Шишкина обоснованы не улучшаемые по порядку оценки погрешности, равномерные по малому параметру ε. Исследован и другой подход. Построен дважды непрерывно дифференцируемый экспоненциальный сплайн на равномерной сетке, точный на сингулярной составляющей интерполируемой функции. Доказано, что для построенного сплайна оценка погрешности равномерна по малому параметру ε. Исследовано предельное поведение построенного экспоненциального сплайна в зависимости от соотношения между параметром ε и шагом сетки. Доказано, что на основе дифференцирования этого сплайна можно вычислять производные функций с большими градиентами с оценками погрешности, равномерными по параметру ε.

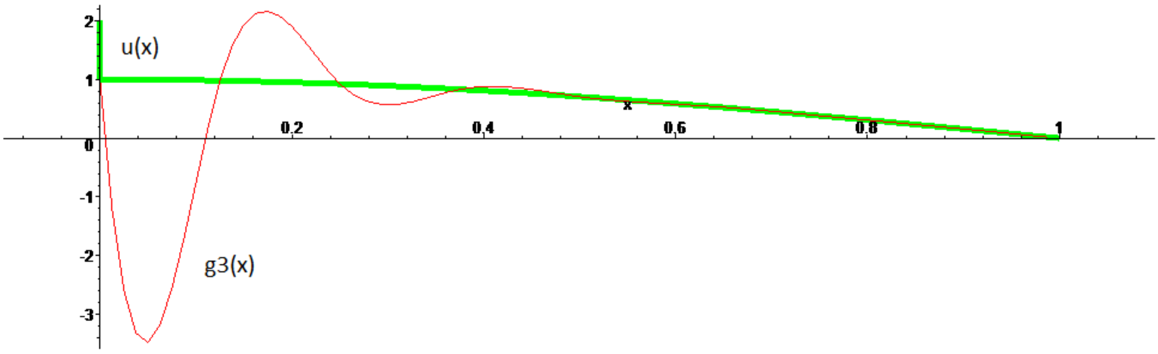


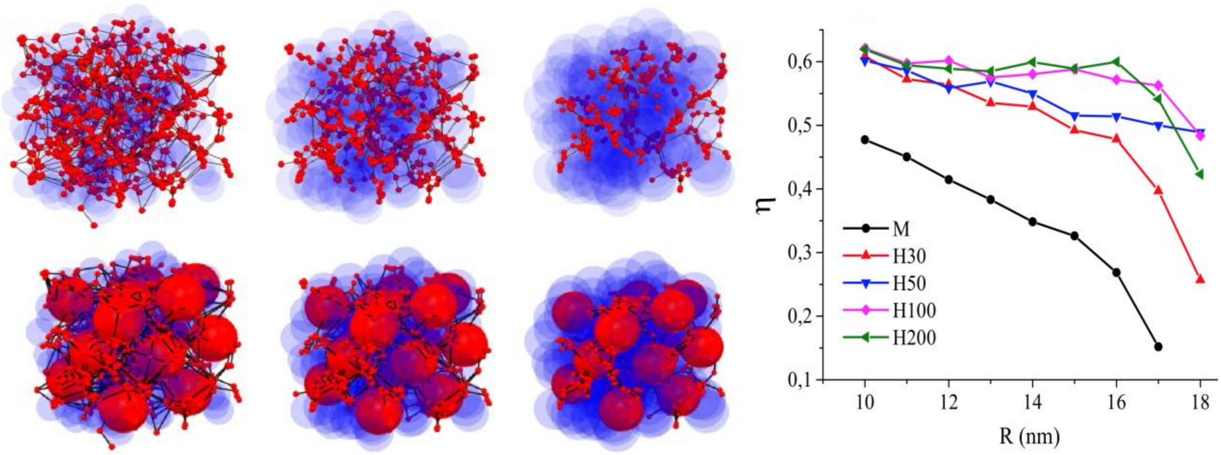

Рис: Функция $u(x)=\cos\frac{\pi x}{2}+\exp\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right)$ и интерполирующий кубический сплайн g3(x), $\varepsilon=10^{-7}$, *N*=16. Требуется модификация сплайна.

[1] *Блатов И.А., Задорин А.И., Китаева Е.В*. Об интерполяции кубическими сплайнами функций с большими градиентами в пограничном слое // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2017, т. 57, 1, с. 9-28.
[2] *Блатов И.А., Задорин А.И., Китаева Е.В*. Об интерполяции параболическим сплайном функций с большими градиентами в пограничном слое // Сибирский математический журнал, 2017, т. 58, 4, с. 745-760.
[3] *Блатов И.А., Задорин А.И., Китаева Е.В*. О равномерной сходимости параболической сплайн-интерполяции на классе функций с большими градиентами в пограничном слое // Сибирский журнал вычислительной математики, 2017, т. 20, 2, с. 131-144.
[4] *Блатов И.А., Задорин А.И., Китаева Е.В*. О равномерной по параметру сходимости экспоненциальной сплайн-интерполяции при наличии пограничного слоя // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2018, т. 58, 3, с. 365-382.
[5] *Blatov I.A., Zadorin A.I., Kitaeva E.V*. An application of the exponential spline for the approximation of a function and its derivatives in the presence of a boundary layer // Journal of Physics: Conference Series, 2018, v. 1050, 012012.

**1.1.7. Математическое моделирование**

**28. Построена двухмасштабная модель деактивации катализаторов тяжелой нефти для оценки сравнительной эффективности катализаторов с различными текстурными свойствами.** (в.н.с., д.ф.-м.н. Базайкин Я.В., с.н.с., к.ф.-м.н. Малькович Е.Г., оба – лаборатория Г3, совместно с Лысиковым А.И., Пархомчук Е.В., Семейкиной В.С. (ИК СО РАН)).

Была построена двухмасштабная модель деактивации бимодальных катализаторов тяжелой нефти. На масштабе пор катализатора описана эволюция основных характеристик порового пространства: пористости, удельной площади, извилистости. На масштабе гранулы катализатора вычислена степень падения скорости реакции в процессе деактивации. Проведено сравнение эффективности различных типов катализаторов. Продемонстрирована согласованность модели с экспериментальными данными.




*Динамика изменения пространства пор катализатора в ходе деактивации для двух типов катализаторов (слева) и степень падения скорости реакция для различных типов катализаторов (справа)*

[1] *V. S. Semeykina, E. G. Malkovich, Ya. V. Bazaikin, A. I. Lysikov, E. V. Parkhomchuk.* Optimal Catalyst Texture in Macromolecule Conversion: A Computational and Experimental Study // Chemical Engineering Science. 2018. V. 188. P. 1-10.
DOI: 10.1016/j.ces.2018.05.005

**29. Построена договорная модель совершенной конкуренции, работоспособная для моделей экономики, в которых (классическое) требование условия Слейтера может нарушаться. Доказана эквивалентность нечётко договорных распределений и равновесий с нестандартными ценами.** (в.н.с., д.ф.-м.н. Маракулин В.М., лаборатория Э1)

В неоклассической модели Эрроу — Дебре в условиях совершенной конкуренции каждое распределение из ядра допускает ценовую децентрализацию, т.е. является равновесным распределением. Более того, именно условия, при которых ядро и равновесие совпадают и называются совершенной конкуренцией. Однако во всех известных в литературе моделях совершенной конкуренции соответствующая теорема о совпадении ядра и равновесия доказывается исключительно в рамках условия выживаемости, которое обеспечивает выполнение условия Слейтера в задаче потребителя. Насколько значимо это дополнительное требование?
Анализируется классический подход Дебре — Скарфа, который сравнивается с разработанной автором договорной моделью совершенной конкуренции. Показано, что договорной подход обеспечивает наиболее точную модель. Концепция нечётко договорного распределения — требуется стабильность относительно заключения нового договора при частично-асимметричном разрыве уже имеющихся. При слабых предположениях доказано, что эти распределения совпадают с равновесиями с нестандартными ценами. Распределения, которые при этом реализуются, отличаются от элементов классического ядра в условиях совершенной конкуренции (равновесия Эджуорта). Показано, что если модельные предположения обеспечивают условие выживаемости, то договорной подход совпадает с классическим.

[1] *Маракулин В.М.* Совершенная конкуренция без условия Слейтера: эквивалентность нестандартного и договорного подхода, Экономика и Математические Методы, 54(1), Москва, 2018, с. 69–91.
[2] *Marakulin V.* Perfect competition without Slater’s condition: the equivalence of non-standard and contractual approach. — 2018, In: Materials of XXVII European Workshop on General Equilibrium Theory, June 27—29, Paris, France. University Paris 1 Pantheon-Sorbonne Centre d’Economie de la Sorbonne & Paris School of Economics (EWGET-2018), 29 pages.

**30. Предложен новый подход к оптимизации формы рабочего колеса гидротурбины, позволивший существенно повысить характеристики проектируемых турбин.** (с.н.с., к.т.н. Скороспелов В.А., с.н.с., к.т.н. Турук П.А., оба – лаборатория Ч1, совместно с Чирковым Д.В. (ИВТ СО РАН))

Рабочее колесо гидротурбины − это наиболее сложная и ответственная часть гидротурбины. Для каждой отдельной ГЭС проектируется уникальное рабочее колесо. Геометрия рабочего колеса определяет мощность турбины, её КПД, прочностные, весовые и кавитационные характеристики. При оптимизации геометрической формы рабочего колеса возникают сложные, чрезвычайно трудоёмкие многокритериальные задачи оптимизации с большим числом свободных параметров, оптимальный выбор которых должен учитывать, как правило, противоречивые требования, предъявляемые к рабочему колесу: высокий КПД (для современных гидротурбин он достигает 95%) в широкой области рабочих режимов, отсутствие кавитации, низкий вес рабочего колеса и одновременно высокая прочность, большой гарантийный срок безотказной эксплуатации (порядка 30 лет). Важную роль при оптимизации рабочих колеса играют средства описания геометрии лопастей турбины. Предложена новая параметризация функции толщины лопасти, которая вместе с описанием срединной поверхности лопасти позволяет адекватно с относительно небольшим количеством варьируемых параметров описывать геометрию лопасти. Разработаны методы генерирования трехмерных сеток для расчета течений в областях сложной геометрической формы. Для расчета прочностных характеристик рабочего колеса разработаны методы построения конечно-элементных сеток. Для решения многокритериальных оптимизационных задач используются современные генетические методы оптимизации.

Предложенные алгоритмы и программное обеспечение протестированы на оптимизационных расчетах для рабочих колес Красноярской ГЭС и ГЭС Урра (Колумбия). В результате удалось повысить КПД турбин и снизить их вес без ухудшения кавитационных и прочностных характеристик.

[1] *Chirkov D.V., Ankudinova A.S., Kryukov A.E., Cherny S.G., Skorospelov V.A.* Multi-objective shape optimization of a hydraulic turbine runner using efficiency, strength and weight criteria // Structural and Multidisciplinary Optimization. 2018. Vol. 58, issue 2. P. 627-640.
DOI: 10.1007/s00158-018-1914-6
[2] *Chirkov D., Scherbakov P., Skorospelov V., Cherny S., Zakharov A.* Numerical simulation of air injection in Francis turbine // Proc. 29th IAHR Symposium on Hydraulic Machinery and Systems (Kyoto, Japan, Sept.16-21). 2018. 10 p.
[3] *Скороспелов В.А., Турук П.А.* Геометрическая поддержка оптимизации поверхности отсасывающей трубы гидротурбины на основе численного моделирования течения // Сибирский журнал индустриальной математики. − 2017.− Т.20, № 4.− С. 55-60.
DOI: 10.17377/SIBJIM.2017.20.407
[4] *Чирков Д.В., Щербаков П.К., Черный С.Г., Скороспелов В.А., Турук П.А.* Численное исследование влияния вдува воздуха на кавитационное течение в радиально-осевой гидротурбине // Теплофизика и аэромеханика.− 2017.− Т. 24, № 5. − С. 711-723.

**1.1.10. Дискретная математика, информатика и математическая кибернетика**

**31. Получены верхние оценки времени первого достижения оптимальных и приближенных решений при работе эволюционных алгоритмов. Найденные оценки применены к классическому генетическому алгоритму и другим эволюционным алгоритмам с полным обновлением популяции на каждом шаге (**в.н.с., д.ф.-м.н. Еремеев А.В., ОФИМ, совместно с D.-C. Dang (Институт системной и компьютерной инженерии, технологии и науки, г. Порто, Португалия), и P.K. Lehre (Бирмингемский университет, г. Бирмингем, Великобритания))

Разработано три метода получения верхних оценок времени первого достижения оптимальных и приближенных решений при работе эволюционных алгоритмов с полным обновлением популяции на каждом шаге. Все три метода основаны на анализе распределения популяции по линиям уровня целевой функции. Первый метод применим к любому эволюционному алгоритму, где особи каждой новой популяции порождаются независимо друг от друга с распределением вероятностей, определенным текущей популяцией. С учетом параметров этого распределения вероятностей получены верхние оценки времени первого достижения решений с заданным значением целевой функции (например, оптимальным или достаточно близким к оптимуму). Данный метод продемонстрирован на примере генетических алгоритмов с достаточно малыми вероятностями «неудачных» мутаций. Второй метод применим к генетическим алгоритмам с любыми операторами мутации при достаточно большой интенсивности селекции. Третий метод не имеет указанных ограничений, но применим только к эволюционным алгоритмам без кроссинговера. Предложенные методы опробованы на известных модельных семействах целевых функций, на задаче максимальной выполнимости логических формул и задачах о максимальном разрезе в графе и о наименьшем покрытии множества.

[1] *Eremeev A.V.* Hitting times of local and global optima in genetic algorithms with very high selection pressure // Yugoslav Journal of Operations Research. 2017. Vol. 27, Issue 3, pp. 323-339. DOI: 10.2298/YJOR160318016E.
[2] *Corus D., Dang D.-C., Eremeev A.V., Lehre P.K.* Level-based analysis of genetic algorithms and other search processes // IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2018, Vol. 22, Issue 5, pp. 707-719. DOI: 10.1109/TEVC.2017.2753538
[3] *Eremeev A.V.* On proportions of fit individuals in population of mutation-based evolutionary algorithm with tournament selection // Evolutionary Computation, Vol. 26, Issue 2, 2018, pp.269-297. DOI:10.1162/EVCO_a_00210.

**32. Предложены методы построения взаимно однозначных почти совершенно нелинейных векторных булевых функций.** (аспирант Идрисова В.А., лаборатория К3)

Векторная булева функция $F$ из $F_2^n$ в $F_2^n$ называется почти совершенно нелинейной (APN), если уравнение $F(x) + F(x+a) = b$ имеет не более двух решений для любых векторов $a, b$ из $F_2^n$, где $a$ – ненулевой вектор. Векторная функция $F$ называется 2-в-1 функцией, если она принимает $2^{n-1}$ различных значений, каждое из которых встречается в векторе значений ровно два раза. Вопрос существования взаимно однозначных APN-функций (APN-перестановок) от четного числа переменных является центральным открытым вопросом в области векторных булевых функций, но до сих пор не были найдены комбинаторные методы их построения. Предложены два метода построения APN-перестановок. Первый осуществляет их поиск с помощью 2-в-1 APN-функций, которые расширенно аффинно эквивалентны перестановкам. Вводится аппарат символьных последовательностей специального вида – допустимых последовательностей, с помощью которого получаются 2-в-1 функции, и описывается способ построения таких последовательностей. Найдены все существующие взаимно однозначные APN-функции от 5 переменных, а также APN-перестановка от 6 переменных. Второй метод использует 2-в-1 векторные функции вида $F=(s_1, \ldots, s_{n-1})$, которые достраиваются до APN-перестановок $S=(s_1, \ldots, s_n)$ добавлением недостающих координатных булевых функций $s_n$. Показано, что 2-в-1 функции этого класса также могут быть получены с помощью допустимых последовательностей. Доказано, что любая APN-перестановка может быть построена с помощью этого метода. Для произвольной функции $F$ получена нижняя оценка числа булевых функций $s_n$, для которых взаимно однозначная функция $S=(s_1, \ldots, s_n)$ является APN-функцией.

[1] *Идрисова В.А.* О построении APN-перестановок с помощью подфункций // Прикладная дискретная математика. 2018. Т. 41. № 2. С. 17–27

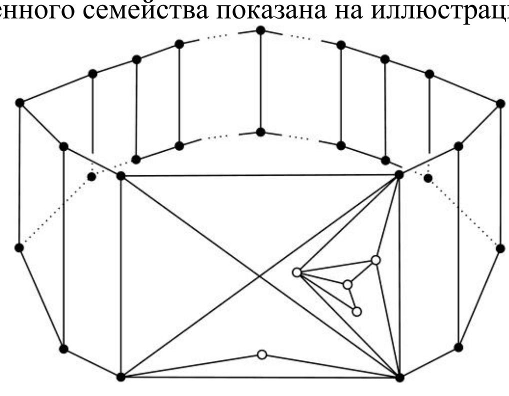
**33. Доказана сильная NP-трудность двух экстремальных задач поиска кластера наибольшего размера с ограниченным квадратичным разбросом точек в конечной совокупности (множестве/последовательности) точек евклидова пространства. Предложены алгоритмы отыскания приближенных решений этих задач за полиномиальное время с гарантированными константными оценками точности.** (г.н.с., д.ф.-м.н. Кельманов А.В., с.н.с., к.т.н. Хамидуллин С.А., н.с., к.ф.-м.н. Хандеев В.И., все трое – лаборатория И1, с.н.с., к.ф.-м.н. Агеев А.А., лаборатория К5, г.н.с., д.ф.-м.н. Пяткин А.В., ведущий инженер, д.ф.-м.н. Шамардин Ю.В., с.н.с., к.ф.-м.н. Шенмайер В.В., все трое – лаборатория К4)

Рассматриваются две задачи поиска в конечной совокупности (множестве/последовательности) точек евклидова пространства такого кластера (подмножества/подпоследовательности) наибольшего размера (мощности/длины), что суммарный квадратичный разброс точек в кластере относительно его неизвестного центроида (геометрического центра) не превосходит заданную долю от квадратичного разброса элементов входной совокупности относительно ее центроида. Задача поиска подпоследовательности отличается от задачи поиска подмножества наличием дополнительных ограничений на элементы искомого кластера. Обе задачи возникают в связи с решением известных прикладных проблем: Data mining, Pattern recognition, Machine learning, Big data, Data cleaning. Доказано, что, несмотря на простоту формулировок, обе задачи NP-трудны в сильном смысле. Предложены алгоритмы отыскания приближенных решений этих задач за полиномиальное время с гарантированными оценками точности. Алгоритм отыскания подмножества находит 1/2-приближенное решение за время $O(N^2(\log N+d))$, где $N$ – число точек во входном множестве, $d$ – размерность пространства. Алгоритм поиска подпоследовательности за время $O(N^3(N^2+d))$ либо устанавливает, что задача не имеет решения, либо находит 1/2-приближенное решение, если длина $M^*$ оптимальной подпоследовательности четна, либо выдает $(1/2\text{-}1/2M^*)$-приближенное решение, если $M^*$ нечетно.

[1] *A.V. Kel’manov, A.V. Pyatkin, S.A. Khamidullin. V.I. Khandeev, Yu.V. Shamardin, and V.V. Shenmaier*. A Polynomial-Time Approximation Algorithm for One Problem Simulating the Search in a Time Series for the Largest Subsequence of Similar Elements // Pattern Recognition and Image Analysis. 2018. Vol. 28, No. 3, P. 363–370. DOI: 10.1134/S1054661818030094
[2] *A.A. Ageev, A.V. Kel’manov, A.V. Pyatkin, S.A. Khamidullin, V.V. Shenmaier*. Approximation Polynomial Algorithm for the Data Editing and Data Cleaning Problem // Pattern Recognition and Image Analysis. 2017. Vol. 27, No. 3, P. 365-370. DOI: 10.1134/S1054661817030038
[3] *A. Kel’manov, A. Pyatkin, S. Khamidullin, V. Khandeev, V. Shenmaier and Yu. Shamardin*. An Approximation Polynomial Algorithm for a Problem of Searching for the Longest Subsequence in a Finite Sequence of Points in Euclidean Space // Communications in Computer and Information Science. 2018. Vol. CCIS 871. P. 120-130. DOI: 10.1007/978-3-319-93800-4_10
[4] *A. Ageev, A. Kel’manov, S. Khamidullin, A. Pyatkin, V. Shenmaier*. Approximation Algorithm for a Quadratic Euclidean Problem of Searching for a Subset with the Largest Cardinality // CEUR Workshop Proceedings, 2017. CEUR-WS.org/Vol-1987. P. 19-23. EID: 2-s2.0-85036605297
[5] *A. Ageev, A. Kel’manov, A. Pyatkin, S. Khamidullin, V. Shenmaier*. 1/2-Approximation Polynomial-Time Algorithm for a Problem of Searching for a Subset // Proc. of 2017 International Multi-Conference on Engineering, Computer and Information Sciences (SIBIRCON), 2017, September 18-22, Novosibirsk, Russia. P. 8-12. DOI: 10.1109/SIBIRCON.2017.8109827

**34. Построено бесконечное семейство двусвязных трансмиссионно иррегулярных графов.** (с.н.с., к.ф.-м.н. Добрынин А.А., лаборатория К6)

Трансмиссия вершины простого связного графа определяется как сумма расстояний от нее до всех других вершин графа в естественной метрике. Граф, в котором трансмиссии всех вершин попарно различны, называется трансмиссионно иррегулярным. Трансмиссии вершин используются для построения важных для приложений инвариантов графов (пример - топологические индексы молекулярных графов в органической химии, используемые для прогнозирования свойств соединений). Известно, что почти все графы не являются трансмиссионно иррегулярными. Дан положительный ответ на вопрос С. Клавжара (S. Klavžar, Appl. Math. Comput., 2018, V. 328, P. 113-118) о существовании бесконечного семейства двусвязных трансмиссионно иррегулярных графов. Структура графов из построенного семейства показана на иллюстрации.



[1] *Добрынин А.А.* О двусвязных трансмиссионно иррегулярных графах // Дискр. анализ исслед. опер. 2018. Т. 25, no. 4. С. 5-14.

**35. Показано, что расширенные циклические коды, связанные с функциями типа Голд, порождаются аффинной орбитой специально выбранных кодовых слов минимального веса.** (с.н.с., к.ф.-м.н. Могильных И.Ю., в.н.с., д.ф.-м.н. Соловьева Ф.И., оба – лаборатория К7)

Исследование нетривиальных свойств классов кодов с хорошими оптимальными свойствами (строение групп автоморфизмов, компактное задание кода, наличие блок-схем, содержащихся в кодах, с хорошими свойствами) является одной из главных фундаментальных задач теории корректирующих кодов. В литературе широко исследованы различные свойства расширенных циклических кодов с аффинно-инвариантной группой автоморфизмов. Авторами данной работы для расширенного циклического кода, отвечающего известной функции Голда, обнаружено кодовое слово минимального веса 6, линейная оболочка аффинной орбиты которого порождает весь код. То есть такой код может быть задан одним кодовым словом минимального веса (в отличие от общей ситуации задания произвольного линейного кода с помощью базиса). Такой способ задания кода важен в теории кодирования с практической точки зрения компактного хранения информации. Отметим, что функция Голда, будучи APN-фукцией (almost perfect nonlinear function), играет важную роль в криптографии.

[1] *Mogilnykh I. Yu., Solov'eva F.I.* On explicit minimum weight bases for extended cyclic codes related to Gold functions // Designs, Codes and Cryptography, 2018, Vol. 86, Issue 11, p. 2619–2627.

**36. Получена достижимая нижняя оценка размера носителя собственной функции с заданным собственным значением графа Джонсона. Полностью описаны функции с такими носителями для достаточно большого числа вершин графа.** (н.с., к.ф.-м.н. Воробьев К.В., с.н.с., к.ф.-м.н. Могильных И.Ю., н.с., к.ф.-м.н. Валюженич А.А., все трое – лаборатория К7)

Вещественнозначная функция, заданная на вершинах графа, называется λ-собственной, если вектор значений этой функции является собственным вектором матрицы смежности, отвечающим собственному значению λ. В работе исследуются функции, определенные на вершинах графа Джонсона $J(n,w)$ с наименьшим числом ненулевых значений. Знание таких функций помогает строить и оценивать число таких объектов как полностью регулярные коды, совершенные раскраски. Для достаточно большого $n$ найдена точная нижняя оценка этого числа для всех возможных λ и описаны функции с наименьшим размером носителя.

[1] *Vorob'ev K., Mogilnykh I., Valyuzhenich A.* Minimum supports of eigenfunctions of Johnson graphs // Discrete Mathematics, 2018, Vol. 341, No. 8, P. 2151-2158. DOI: 10.1016/j.disc.2018.04.018

**37. Найдена нижняя оценка числа трансверсалей в полностью разделяемых квазигруппах нечетной арности. Доказано, что на множестве n-арных квазигрупп порядка 4 только квазигруппы, изотопные итерированной группе $Z_4$ четной арности, не содержат трансверсалей. Для итерированных групп $Z_4$ и $Z_2^2$ произвольной арности вычислено количество трансверсалей.** (н.с., к.ф.-м.н. Тараненко А.А., лаборатория К7)

$n$-Арная операция над множеством мощности $q$ является $n$-арной квазигрупой порядка $q$, если таблица Кэли этой операции представляет собой $n$-мерный латинский гиперкуб. Трансверсалью квазигруппы называется такой набор из $q$ элементов ее таблицы Кэли с различными значениями, что каждая пара элементов отличается во всех позициях. Назовем $n$-арную квазигруппу разделимой, если она может быть получена суперпозицией двух квазигрупп, арность каждой из которых не меньше 2, и будем говорить, что квазигруппа полностью разделима, если она может быть представлена в виде суперпозиции бинарных квазигрупп.

Получена нижняя оценка на число трансверсалей для большинства полностью разделимых квазигрупп. Доказано, что за исключением квазигрупп, изотопных итерированной группе $Z_4$ четной арности, все квазигруппы порядка 4 содержат трансверсаль. Предложена нижняя оценка на число трансверсалей в квазигруппах порядка 4 и нечетной арности и найдена формула для количества трансверсалей в итерированных группах $Z_4$ и $Z_2^2$.

Все полученные результаты могут быть также интерпретированы в терминах латинских гиперкубов. Вопрос о существовании трансверсалей в латинских гиперкубах был поставлен в статье I.M. Wanless (2011).

[1] *Taranenko A.A.* Transversals in completely reducible multiary quasigroups and in multiary quasigroups of order 4 // Discrete Math., 2018, V. 341, P. 405-420. DOI: 10.1016/j.disc.2017.09.008.
[2] *Тараненко А.А.* О количестве трансверсалей в n-арных квазигруппах порядка 4 // Мат. заметки, 2017, Т. 101, вып. 5, с. 798-800. DOI: 10.4213/mzm11438.

### 1.7.1. Физика элементарных частиц и фундаментальных взаимодействий

**38. Показано, что полулептонные распады очарованных псевдоскалярных мезонов являются эффективным зондом для изучения лёгких скалярных мезонов.** (г.н.с., д.ф.-м.н. Ачасов Н.Н., с.н.с., к.ф.-м.н. Киселёв, оба – лаборатория В3)

Показано, что исследование $\pi\eta$-спектров в полулептонных распадах $D \to \pi\eta e^{+}\nu$ позволяет выяснить отсутствие конституэнтных кварк – антикварковых пар в изотопическом триплете лёгких скалярных мезонов a0(980) и таким образом подтвердить четырёхкварковую природу a0(980). Подготовлены формулы для анализа экспериментальных данных на c-τ-фабрике BES III в Пекине.

[1] *Achasov N.N., Kiselev A.V.* Light scalar mesons and two-kaon correlation functions // Phys. Rev. D, 2018, Vol. 97, 036015.
[2] *Achasov N.N., Kiselev A.V.* a0(980) physics in semileptonic D0 and D+ decays // Phys. Rev. D, 2018, Vol. 98, 096009.

**Важнейшие научные результаты ИМ СО РАН за 2018 год утверждены Ученым советом Института 9 ноября 2018г., протокол № 5.**

Председатель Ученого совета
академик С.С. Гончаров

Ученый секретарь Совета
к.ф.-м.н. И.Е. Светов