Утверждены на заседании Учёного совета
01.12.2025, протокол №8

Важнейшие научные результаты ИМ СО РАН за 2025 год

Алгебра, теория чисел, математическая логика

Классифицированы полупростые и простые конечномерные алгебры Новикова над произвольным полем, а также автоморфизмы простых таких алгебр над алгебраически замкнутым полем (г.н.с., д.ф.-м.н. Желябин Виктор Николаевич, в.н.с., д.ф.-м.н. Пожидаев Александр Петрович, лаборатория алгебры).

Алгебра $\mathcal{N}$ над полем F называется *алгеброй Новикова*, если она удовлетворяет следующим тождествам

$$(x, y, z) = (y, x, z), (xy)z = (xz)y.$$

В 1987 году Е. Зельманов доказал, что каждая конечномерная простая алгебра Новикова над алгебраически замкнутым полем характеристики ноль является полем. Изучение простых конечномерных алгебр Новикова над полем характеристики $p > 0$ проводилось в основном в работах J.M. Osborn и X. Xu; в итоге такие алгебры были описаны, но с большими ограничениями на поле, которые в нашей работе полностью снимаются.

Основная конструкция алгебр Новикова (*Гельфанд – Дорфман*) следующая: пусть $(\mathcal{A};\cdot)$ – ассоциативная коммутативная алгебра с дифференцированием d и $\alpha \in \mathcal{A}$; определяем произведение $\circ$ на $\mathcal{A}$ правилом

$$a \circ b = a \cdot d(b) + \alpha \cdot a \cdot b.$$

Полученную алгебру Новикова обозначаем $\mathcal{A}_D = (\mathcal{A}, d, \alpha)$, а также $\mathcal{A}(d) \coloneqq (\mathcal{A}, d, 0)$; здесь $D = d + R_\alpha$ – *обобщенное дифференцирование*.

Пусть A – произвольная алгебра. Положим $A^2 := \langle \sum_{i=1}^{n} a_i b_i : a_i, b_i \in A, n \in \mathbb{N} \rangle$. Алгебра A называется *простой*, если $A^2 \neq 0$ и A не содержит собственных идеалов. Напомним, что алгебра Новикова *полупроста*, если она не содержит ненулевых идеалов с нулевым умножением.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{N}$ – конечномерная полупростая алгебра Новикова над полем F. Тогда $\mathcal{N}$ классически полупроста, т.е. является прямой суммой простых алгебр.*

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{N}$ – неассоциативная конечномерная простая алгебра Новикова над полем F характеристики $p > 0$. Тогда $\mathcal{N}$ получается по конструкции Гельфанд-Дорфман из ассоциативной коммутативной дифференциально простой алгебры.*

Пусть $B_{k,p}(F)$ – алгебра усеченных многочленов от k неизвестных над полем F характеристики $p > 0$. Легко видеть, что

$$\mathrm{Aut}_d \mathcal{A} := \{\phi \in \mathrm{Aut}\, \mathcal{A} : \phi d = \alpha d \phi \text{ для некоторого } \alpha = \alpha_\phi \in F^*\} \leq \mathrm{Aut}\, \mathcal{A}$$

Автоморфизм ϕ алгебры $(\mathcal{A}, d, a)$ назовём (скалярно) *стандартным*, если $\phi = \alpha\psi$ для некоторого обратимого (скаляра) $\alpha \in \mathcal{A}$ и $\psi \in \mathrm{Aut}_d \mathcal{A}$.

Теорема 3. *Пусть* $\mathcal{A}$ *– ассоциативная коммутативная -простая алгебра над алгебраически замкнутым полем* F *характеристики* $p > 0$, $\mathcal{A} \ncong B_{1,2}(F)$. *Тогда* $\phi \in \operatorname{Aut} \mathcal{A}(d)$ *тогда и только тогда, когда* ϕ *скалярно стандартен.*

Обозначим $\mathcal{B}_{\beta,\gamma} = (B_{1,2}(F), (\beta + \gamma x_1)\partial_1, \beta)$ при $\beta, \gamma \in F^*$. Положим $\operatorname{Aut}^*_{d,a}\mathcal{A} := \{\phi \in \operatorname{Aut} \mathcal{A}: \phi d = \alpha d\phi$ для некоторого обратимого $\alpha \in \mathcal{A}, \phi(a) = D(\alpha)\}$

Теорема 4. *Пусть* $\mathcal{A}_D \ncong \mathcal{B}_{\beta,\gamma}$. *Тогда* $\operatorname{Aut} \mathcal{A}_D \cong \operatorname{Aut}^*_{d,a}\mathcal{A}$.

Результат опубликован в:

Pozhidaev, A., Zhelyabin, V. On simple and semisimple finite-dimensional Novikov algebras and their automorphisms // J. Algebra, Vol. 689, 1 March 2026, P. 1-26, Doi: 10.1016/j.jalgebra.2025.09.017

* Работа поддержана РНФ, проект 25-41-00005

Доказывается вычислимая и примитивно рекурсивная (пунктуальная) универсальность некоторых хорошо известных универсальных метрических пространств (м.н.с., к.ф.-м.н. Корнев Руслан Александрович, лаборатория логических систем с.н.с., к.ф.-м.н. Баженов Николай Алексеевич)

Показывается, что стандартное вычислимое представление пространства $C[0,1]$ непрерывных вещественных функций на отрезке является вычислимо и пунктуально универсальным. Также показывается, что исходная конструкция Урысона универсального сепарабельного польского пространства U пунктуально универсальна. Наконец, показывается, что всякое эффективно компактное пунктуальное стоуновское пространство пунктуально гомеоморфно вложимо в пространство Кантора 2^{ω} (отметим, что примитивно рекурсивной компактности для этого не требуется).

Результат опубликован в:

Bagaviev R., Batyrshin I.I., **Bazhenov N.**, Bushtets D., Dorzhieva M., Koh H.T., **Kornev R.**, Melnikov A.G., Ng K.M. Computably and punctually universal spaces // Annals of Pure and Applied Logic. 2025. V.176. N1. 103491:1-31. DOI: 10.1016/j.apal.2024.103491

Описаны все блоки категории рациональных супермодулей над супергруппой P(n), в случае ненулевой характеристики основного поля (в.н.с., д.ф.-м.н. Зубков Александр Николаевич, лаборатория комбинаторных и вычислительных методов алгебры и логики (КВМАЛ))

Пусть G алгебраическая (аффинная) супергруппа. Категория рациональных супермодулей $\mathrm{M} = \mathrm{G} - \mathrm{mod}$ над G идентична категории суперкомодулей над ее координатной супералгеброй $\mathrm{K}[\mathrm{G}]$, являющейся супералгеброй Хопфа. Эта категория распадается в прямую сумму полных подкатегорий $\mathrm{M_b}$ таких, что $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{G}}(\mathrm{N}, \mathrm{N}') = 0$ для произвольных $N \in M_b, N' \in M_{b'}$, где $b \neq b'$ различные блоки категории M. "Величина" блоков измеряет то, насколько далека категория $G - mod$ от того, чтобы быть полупростой.

Над полем нулевой характеристики категория $\mathrm{P(n)-mod}$ имеет $2(n+1)$ блоков [1]. В нашей работе доказывается, что в случае ненулевой характеристики основного поля категория $\mathrm{P(n)-mod}$ имеет всего (!) четыре блока, и их структура не зависит ни от характеристики, ни от параметра n.

[1] Balagovic, M.; Daugherty, Z.; Entova-Aizenbud, I.; Halacheva, I.; Hennig, J.; Im, M. S.; Letzter, G.; Norton, E.; Serganova, V.; Stroppel, C. Translation functors and decomposition numbers for the periplectic Lie superalgebra p(n), Math. Res. Lett. 26 (2019), no. 3, 643–710

Результат опубликован в:

Marko, F., Zubkov, A.N. Blocks for periplectic supergroups in positive characteristic // Journal of Algebra, Volume 673, 1 July 2025, Pages 222-259.

* Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № FWNF-2022-0003 *Универсальная алгебраическая геометрия: теоретико-модельный, алгоритмический и вероятностный подход к изучению алгебраических систем*)

Впервые построен пример булевой алгебры с выделенной подалгеброй, элементарная теория которой не имеет простой модели. Показано, что существует континуум элементарных теорий суператомных булевых алгебр с выделенной подалгеброй, имеющих простую модель, но не имеющих счетно-насыщенной модели. Показано, что существует континуум элементарных теорий суператомных булевых алгебр с выделенной подалгеброй, не имеющих простой модели (в.н.с., д.ф.-м.н., Пальчунов Дмитрий Евгеньевич, лаборатория теории вычислимости и прикладной логики, Трофимов А.В., НГУ)

Рассматриваются суператомные булевы алгебры с выделенной подалгеброй.

Определение 1. Подалгебра $\mathfrak{B}$ суператомной булевой алгебры $\mathfrak{A}$ называется подалгеброй ширины n, если под любым атомом подалгебры $\mathfrak{B}$ лежат не более n атомов алгебры $\mathfrak{A}$ и любой атом алгебры $\mathfrak{A}$ лежит под некоторым атомом подалгебры $\mathfrak{B}$.

Определение 2. Подалгебра $\mathfrak{B}$ суператомной булевой алгебры $\mathfrak{A}$ называется плотной, если $\mathfrak{A} = \mathrm{sub}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{B}, \mathrm{F}(\mathfrak{A}))$ – наименьшая подалгебра алгебры $\mathfrak{A}$, содержащая в себе основное множество $|\mathfrak{B}|$ булевой алгебры $\mathfrak{B}$ и идеал Фреше $\mathrm{F}(\mathfrak{A})$ булевой алгебры $\mathfrak{A}$.

Определение 3. Для алгебраических систем $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ обозначим $\mathfrak{A} \le \mathfrak{B}$ если найдется $\mathfrak{C}$ такая, что $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A}\times\mathfrak{C}$. Алгебраическая система $\mathfrak{A}$ называется неисчезающей, если из $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{M}\times\mathfrak{N}$ следует $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{M}$ или $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{N}$. Алгебраическая система $\mathfrak{A}$ называется идемпотентной, если $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{A}\times\mathfrak{A}$.

Определение 4. Алгебраическая система $\mathfrak{A}$ называется локальной, если число попарно элементарно неэквивалентных неисчезающих алгебраических систем $\mathfrak{B} \le \mathfrak{A}$ конечно, т.е., существуют $\mathfrak{B}_1, \dots, \mathfrak{B}_l$ такие, что для произвольной неисчезающей $\mathfrak{C} \le \mathfrak{A}$ выполнено $\mathfrak{C} \equiv \mathfrak{B}_i$ для некоторого $i \le l$.

Теорема 1. Пусть $\mathfrak{A}$ – суператомная булева алгебра с выделенной плотной подалгеброй конечной ширины. Элементарная теория $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ конечно-аксиоматизируема тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}_1 \times \dots \times \mathfrak{B}_l$ для некоторых локальных неисчезающих неидемпотентных алгебр $\mathfrak{B}_1, \dots, \mathfrak{B}_l$.

Теорема 2. Элементарная теория любой локальной суператомной булевой алгебры с выделенной плотной подалгеброй конечной ширины имеет простую модель.

Теорема 3. Для любого $n \geq 3$ существует континуум элементарных теорий суператомных булевых алгебр с выделенной плотной подалгеброй ширины n, имеющих простую, но не имеющих счетно-насыщенной модели.

Теорема 4. Для любого $n \geq 3$ существует континуум элементарных теорий суператомных булевых алгебр с выделенной плотной подалгеброй ширины n, не имеющих простой модели.

Теорема 5. Для всех алгебр, указанных в теоремах 3 и 4, выполнено:

а) Булева алгебра и её выделенная подалгебра изоморфны.

б) Факторы булевой алгебры и её выделенной подалгебры по идеалу Фреше совпадают. Таким образом, булева алгебра и её выделенная подалгебра являются почти неразличимыми.

Результат опубликован в:

1. **Пальчунов, Д.Е., Трофимов, А.В.** Суператомная булева алгебра с выделенной подалгеброй, теория которой не имеет простой модели // Сибирский математический журнал. 2025. Т.66. №3. С.506-522. DOI: 10.33048/smzh.2025.66.313

2. **Пальчунов, Д.Е., Трофимов, А.В.** Теории булевых алгебр с выделенной подалгеброй, не имеющие простой модели // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2025. Т. 526. № 6 (в печати).

* Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № FWNF-2022-0011 *Логические исчисления и семантики, теории моделей и вычислимости*)

Геометрия и топология

Доказано, что среди всех прямоугольных групп Коксетера, действующих в трехмерном гиперболическом пространстве, наименьший кообъем имеет группа, порожденная отражениями в гранях прямоугольной треугольной бипирамиды (г.н.с., чл.-корр. РАН Веснин Андрей Юрьевич, лаборатория динамических систем, инж-иссл. Егоров Андрей Александрович, лаборатория теории графов)

Структура множества объемов трехмерных гиперболических многообразий описывается теоремой Терстона-Ергенсена, а множества объемов орбифолдов - теоремой Данбара-Мейергоффа. Вопрос о наименьшем объеме в классе орбифолдов, возникающих при действии прямоугольных групп Коксетера в трехмерном гиперболическом пространства, эквивалентен вопросу о том, какой прямоугольный (все двугранные углы прямые) гиперболический многогранник имеет наименьший объем. В представленной работе доказано, что таким многогранником является треугольная бипирамида с тремя идеальными и двумя конечными вершинами. Объем равен константе Каталана G = 0,915965....

Результат опубликован в:

Веснин, А.Ю., Егоров, А.А. Прямоугольная группа Коксетера минимального кообъема в трехмерном гиперболическом пространстве // Сибирский математический журнал, 2025, Т. 65, № 6, 20 стр. 1037-1056.

* Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № FWNF-2022-0004 *Геометрия, динамические системы и их приложения*)

Математический анализ

При самых общих условиях получены описания гомеоморфизмов класса Решетняка, и гомеоморфизмов, индуцирующих ограниченные операторы композиции пространств типа Соболева (г.н.с., д.ф.-м.н. Водопьянов Сергей Константинович, лаборатория геометрической теории управления в соавторстве с С.В. Павловым и Д.А. Сбоевым, НГУ)

Исследована новая задача описания операторов композиции на метрических пространствах с мерой. Метрическое пространство с мерой — это сепарабельное метрическое пространство с нетривиальной конечной на шарах мерой Радона. В таких пространствах вводятся функциональные пространства типа Соболева и отображения класса Решетняка между метрическими пространствами с мерой. В этих самых общих условиях новыми методами доказательств получены описания гомеоморфизмов класса Решетняка, и гомеоморфизмов, индуцирующих ограниченные операторы композиции пространств типа Соболева. Для ее решения разработаны новые адекватные понятия и подходы, а также ассоциированные с ними методы, которые являются принципиально новыми и в евклидовом пространстве. Ожидается, что новая концепция будет служить отправной точкой для многих задач и теорий.

Результат опубликован в:

[1] Решетняк, Ю.Г., Соболевские классы функций со значениями в метрическом пространстве // Сибирский математический журнал. 1997. Т. 38. №. 3. С. 657–675.

[2] Pavlov, S.V., Vodopyanov, S.K. Reshetnyak-class mappings and composition operators // Analysis and Mathematical Physics (2025) 15:143 Doi: 10.1007/s13324-025-01142-x

[3] Водопьянов, С.К., Сбоев, Д.А. Операторы композиции пространств Соболева на метрических пространствах с мерой. II // Математический сборник. 2026. Т. 217. 25 с.

[4] Водопьянов, С.К., Ухлов, А.Д.-О. Пространства Соболева и (P,Q)-квазиконформные отображения групп Карно // Сибирский математический журнал. 1998. Т. 39. №. 4. С. 776–795.

[5] Водопьянов С.К. О совпадении функций множества в квазиконформном анализе // Математический сборник. 2022. Т. 213. №. 9. С. 3–33.

* Работа С.К. Водопьянова выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № FWNF-2022-0006 *Геометрический анализ на метрических структурах и его применения*)

Получены аналитические формулы для характеристического полинома Лапласа широкого семейства циркулянтных расслоений графов. Полученные формулы, а также их асимптотика эффективно выражаются в терминах полиномов Чебышева (г.н.с., д.ф.-м.н. Медных Александр Дмитриевич, с.н.с., к.ф.-м.н. Медных Илья Александрович, профессор Йонг Су Квон, Йоннамский университет, Южная Корея)

Цель данного направления исследований — изучение инвариантов циркулянтных расслоений графов. При этом, базовый граф расслоения предполагается фиксированным, а число слоев имеет сколь угодно большой порядок. Классическим примером таких расслоений являются циркулянтные графы. Они накрывают одновершинный граф с заданным числом петель. Более сложными представителями циркулянтных расслоений являются $I-, Y-, H$-графы, обобщенные графы Петерсена, сэндвич-графы, дискретные торы и многие другие.

Основным результатом является получение аналитических формул, позволяющих вычислять характеристические полиномы Лапласа циркулянтных расслоений графов. Знание такого полинома позволяет определять ряд основных спектральных инвариантов. Например, число отмеченных остовных лесов и остовных деревьев, индекс Кирхгофа и другие. Также это позволяет находить асимптотику перечисленных инвариантов при стремлении числа слоев к бесконечности, и изучать арифметические свойства возникающих здесь числовых последовательностей.

Ключевым инструментом для доказательства полученных выступают полиномы Чебышева. Основные формулы, а также их асимптотика эффективно выражаются через корни линейных комбинаций полиномов Чебышева.

Результат опубликован в:

1. **Квон, Й.С., Медных, А.Д., Медных, И.А.** О структуре характеристического полинома Лапласа для циркулянтных графов // Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр., 515, (2024), 34-39.
2. **Kwon, Y.S., Mednykh, A.D., Mednykh, I.A.** On the structure of Laplacian characteristic polynomial for circulant foliation // Discrete Applied Mathematics, 375, (2025), 338-349.

Дифференциальные уравнения и математическая физика

О разрешимости краевых задач в классе радиально-симметричных решений для эллиптического уравнения с p-лапласианом (в.н.с., д.ф.-м.н. Терсенов Арис Саввич, лаборатория дифференциальных уравнений и смежных вопросов анализа, Сафаров Р.Ч., НГУ)

Рассмотрим вторую и третью краевую задачу для уравнения

$$-div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = F(x, u, \nabla u) \text{ в } B_R \subset \mathbb{R}^n,$$

$$\frac{\partial u}{\partial v} + \beta u|_{\partial B_R} = 0,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \upsilon}\right|_{\partial B_R} = 0,$$

где B_R – шар радиуса R, ∂B_R – граница B_R, υ – вектор внешней нормали к ∂B_R, постоянная $\beta > 0, p > 2$. Предполагаем, что функция F не удовлетворяет условию Бернштейна – Нагумо. Исследуется разрешимость задачи в классе радиально симметричных решений. Определен класс градиентных нелинейностей, для которого доказано существование слабого соболевского радиально симметричного решения с производной непрерывной по Гельдеру с показателем $\frac{1}{p-1}$. Показано, что нелинейность по градиенту может быть произвольной при условии, что младший член, содержащий градиент непрерывен по Липшицу по пространственной переменной и строго монотонен по переменной u. Решение исходной задачи аппроксимируется классическими решениями соответствующей регуляризованной задачи. Полученные для регуляризованной задачи априорные оценки, не зависят от параметра регуляризации, что позволяет предельным переходом получить решение исходной задачи, указанной гладкости.

[1] Терсенов А.С., Сафаров Р.Ч. О радиально симметричных решениях третьей краевой задачи для эллиптического уравнения с –лапласианом // Математические заметки СВФУ (Mathematical Notes of NEFU). 2024. Т.31. №4. С.64-81. DOI: 10.25587/2411-9326-2024-4-64-81

Результат опубликован в:

Терсенов, А.С., Сафаров, Р.Ч. Радиально-симметричные решения задачи Неймана для уравнения с ***p***-лапласианом // Ученые записки Казанского университета. Серия Физико-математические науки (Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki). 2025. Т.167. №1. С.150-168. DOI: 10.26907/2541-7746.2025.1.150-168

* Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № FWNF-2022-0008 *Теория дифференциальных уравнений и приложения*)

Теория вероятностей и математическая статистика

Получена новая теорема о предельном распределении числа пересечений полосы траекторией случайного блуждания, у которого снос стремится к нулю. Приведена также оценка скорости сходимости в этой теореме (г.н.с., д.ф.-м.н. Лотов Владимир Иванович, лаборатория теории вероятностей и математической статистики).

Нахождение точных формул для распределений функционалов, связанных с моментом достижения траекторией случайного блуждания определенных границ, доступно только для некоторых частных ситуаций. Для блужданий общего вида приходится довольствоваться различными аппроксимациями искомых распределений и их характеристик. Использование первых членов асимптотических разложений нужных распределений в рамках подходящего метода асимптотического анализа обычно дает приемлемую аппроксимацию.

Один из возможных методов асимптотического анализа в граничных задачах основывается на предположении, что снос случайного блуждания стремится к нулю. В этой ситуации происходит качественное изменение характера траектории, в частности, число пересечений полосы траекторией случайного блуждания неограниченно растет.

В работе [1] первоначально в условиях крамеровского типа получена теорема о предельном распределении числа пересечений полосы при стремлении сноса к нулю. В последующей работе [2] удалось получить существенное усиление этого результата, состоящее в ослаблении условий на распределение скачков блуждания и получении оценки скорости сходимости в этой теореме.

[1] Лотов, В.И. О переходных явлениях в одной граничной задаче для случайных блужданий // Сибирские электронные математические известия. 2024, т.21, №2, с. 1152-1166. http://semr.math.nsc.ru/v21/n2/p1152-1166.pdf

Результат опубликован в:

[2] **Лотов, В.И.** Об асимптотике распределения числа пересечений полосы случайным блужданием с малым сносом. Сибирские электронные математические известия, 2025, т. 22, №1, с. 864-873. https://math-semr.ru/sites/math-semr.ru/files/2025-07/p0864-0873.pdf

* Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № FWNF-2022-0010 *Асимптотические свойства случайных процессов и их приложения*)

Вычислительная математика

Разработан подход для повышения точности при применении формулы Тейлора к функции с составляющей, имеющей большие градиенты. Результат обобщен на двумерный случай (г.н.с., д.ф.-м.н. Задорин Александр Иванович, лаборатория математического моделирования в механике, Омский филиал)

Исследована задача приближения многочленами функций одной и двух переменных с большими градиентами. Актуальность задачи в том, что погрешность формулы Тейлора значительна, если функция имеет большие градиенты. Предполагается, что для функции одной переменной справедлива декомпозиция в виде суммы регулярной составляющей, производные которой ограничены до некоторого порядка, и погранслойной составляющей, рассматриваемой как функция общего вида, имеющая большие градиенты и известная с точностью до множителя. Регулярная составляющая и множитель в явном виде не заданы. Такая декомпозиция известна для решения сингулярно возмущенной краевой задачи. Погранслойная составляющая отвечает за большие градиенты функции в области пограничного слоя. На основе формулы Тейлора построена формула, точная на погранслойной составляющей, для приближения функции многочленами произвольно задаваемой степени. Для построенной формулы получены оценки погрешности такие же, как при применении формулы Тейлора к регулярной составляющей. Результат обобщен на двумерный случай.

[1] Zadorin, A.I. Application of a Taylor series to approximate a function with large gradients // Siberian Electronic Mathematical Reports, 2023, v 20, № 2, pp. 1420—1429, doi: 10.33048/semi.2023.20.087

[2] Zadorin, A.I. Approximation of a function by polynomials in the presence of a region of large gradients // Siberian Electronic Mathematical Reports, 2024, v 21, № 2, p. 1108-1117. doi.org/10.33048/semi.2024.21.072

[3] Задорин А.И. Применение формулы Тейлора для приближения многочленами функции двух переменных с большими градиентами // Математические труды, 2024, т. 27, № 4, с. 81-92. doi: 10.25205/1560-750X-2024-27-4-81-92

Результат опубликован в:

Zadorin, A.I. Application of Taylor's Formula to Polynomial Approximation of a Function of Two Variables with Large Gradients // Siberian Advances in Mathematics, 2025, Vol. 35, No. 1, pp. 87–92. doi: 10.1134/S1055134425010079

* Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № FWNF-2022-0016 *Модели и методы обработки данных для поддержки процессов принятия решений*)

Дискретная математика, информатика и математическая кибернетика

Открытым треугольником (ОТ) в неориентированном графе называется индуцированный подграф из трёх вершин ровно с двумя рёбрами. Рассматривается класс графов, в котором число вершин и рёбер отличается на константу c. Получена полная характеризация экстремальных по числу ОТ графов в таком классе с не менее чем c + 7 вершинами (г.н.с., д.ф.-м.н. Пяткин Артём Валерьевич, лаборатория исследования операций)

Выдвигается цикл работ, связанных с подсчетом максимального числа открытых треугольников (ОТ) – индуцированных трехвершинных подграфов ровно с двумя ребрами – в графах с фиксированным числом вершин n и малым числом ребер m, а также характеризацией экстремальных графов, на которых достигается этот максимум. В работе [4] доказано, что при фиксированном n максимальное число ОТ достигается на равновесном полном двудольном графе. Там же впервые поставлена задача поиска графов с максимальным числом ОТ при фиксированных n и m, а также полностью рассмотрен случай $m < n$. В работе [3] получена полная характеризация экстремальных графов при $m = n$. В работе [2] для случая $m = n + c$ доказана единственность экстремального графа при $n > 4c + 6$. Наконец, в завещающей цикл работе [1] получена полная характеризация экстремальных по числу ОТ графов с $m = n + c$ и $n > c + 6$.

[1] **Пяткин А.В.** Об экстремальных по числу открытых треугольников графах с малым числом рёбер // Дискретный анализ и исследование операций. 2025. Т.32. №2. С.107-121. DOI: 10.33048/daio.2025.32.830

[2] Пяткин А.В. О максимальном числе открытых треугольников в графах с малым числом рёбер // Дискретный анализ и исследование операций. 2024. Т. 31. № 3. С. 134-142. DOI: 10.33048/daio.2024.31.793

[3] Пяткин А. В., Черных О. И. О максимальном числе открытых треугольников в графах с одинаковым числом вершин и рёбер // Дискретный анализ и исследование операций. 2022. Т. 29, № 1. С. 46–55. DOI: 10.33048/daio.2022.29.723

[4] Pyatkin A., Lykhovyd E., Butenko S. The maximum number of induced open triangles in graphs of a given order // Optimization Letters. 2019. Vol.13, N.8. P. 1927-1935 (WoS IF: 1.399, Q2 Scopus SJR 0.779 Q1) DOI: 10.1007/s11590-018-1330-2

* Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № FWNF-2022-0019 *Построение точных и приближенных алгоритмов для решения дискретных экстремальных задач*)

Впервые в явном виде решена задача восстановления перестановок в метрике Хэмминга. В частности, получены формулы пересечений метрических шаров радиуса r, чьи центры находятся на расстоянии не более четырёх друг от друга. В общем случае, для достаточно большого n и при наличии не более r ошибок Хэмминга, доказано, что по крайней мере Θ(n^(r−2)) различных искажённых перестановок будет достаточно, чтобы восстановить любую произвольную перестановку (с.н.с., к.т.н. Константинова Елена Валентиновна, лаборатория теории графов, в соавторстве с Ванг Кс., Пекинский технический университет и Фу Ф.-В., Нанькайский университет)

Одной из классических задач в теории кодирования является задача о восстановлении последовательности по её соседним последовательностям в некоторой метрике. При этом, для решения этой задачи требуется найти наибольшее по мощности пересечение двух метрических шаров заданного радиуса. В данной работе рассматриваются перестановки длины n с метрикой Хэмминга, для которых получены точные значения таких пересечений метрических шаров радиуса r, чьи центры находятся на расстоянии 2,3,4 друг от друга. В работе также доказаны следующие результаты. Для любого $n > 4$, доказано, что любая перестановка восстанавливается по четырём различным перестановкам, находящимся от искомой на расстоянии Хэмминга не более двух. Для любого $n > 5$, доказано, что любая перестановка восстанавливается по $4n - 5$ различным перестановкам, находящимся от искомой на расстоянии Хэмминга не более трёх. Для любого $n > 6$, доказано, что любая перестановка восстанавливается по $7n^2 - 31n + 37$ различным перестановкам, находящимся от искомой на расстоянии Хэмминга не более четырёх. В общем случае, для достаточно большого n и при наличии не более r ошибок Хэмминга, доказано, что по крайней мере $\Theta(n^{r-2})$ различных искажённых перестановок будет достаточно, чтобы восстановить любую произвольную перестановку.

Работа опубликована в:

Wang, X., Fu, FW. Konstantinova, E.V. The sequence reconstruction of permutations with Hamming metric // Des. Codes Cryptogr. 93, 11–37 (2025). https://doi.org/10.1007/s10623-024-01509-4

* Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № FWNF-2022-0017 *Актуальные проблемы алгебраической теории графов*)

Предложены приближенный и точные полиномиальные алгоритмы решения максиминной задачи размещения на сети на плоскости с ограничениями на минимальные расстояния (в.н.с., д.ф.-м.н. Забудский Геннадий Григорьевич, лаборатория дискретной оптимизации, Омский филиал)

Исследована задача размещения объектов с максиминным критерием на геометрической сети, расположенной на плоскости с ограничениями на минимально допустимые расстояния между вершинами и объектами и объектов между собой. Для решения задачи с одним объектом предложены точные полиномиальные алгоритмы с применением диаграммы Вороного и условий Каруша-Куна-Таккера. Для двух объектов разработан полиномиальный алгоритм поиска приближенного решения с заданной точностью с помощью построения выпуклой оболочки конечного множества допустимых точек и поиска ее диаметра. Приведена трудоемкость предложенных алгоритмов.

[1] Zabudsky, G.G. Maximin and Maxisum network location problems with various metrics and distance constraints. // Communications in Computer and Information Science Vol. 2239, 2024. P. 126-139. doi: 10.1007/978-3-031-73365-9_9

Результат опубликован в:

Забудский, Г.Г. Приближенное решение максиминной задачи размещения объектов на сети с ограничениями на минимальные расстояния. //Прикладная дискретная математика № 68, 2025. С. 114-122. doi: 10.17223/20710410/68/8

* Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № FWNF-2022-0020 *Модели и алгоритмы дискретной оптимизации для проектирования и управления сложными системами*)

Математическое моделирование и методы прикладной математики

Построены примеры задач построения решающих функций, для которых решения избыточной сложности обеспечивают более высокую точность на конечных выборках по сравнению с моделями минимально достаточной сложности (с.н.с., к.ф.-м.н. Неделько Виктор Михайлович, лаборатория машинного обучения и анализа данных)

Продемонстрирована возможность применения идеи дистилляции знаний к методу бустинга. Целесообразность такого подхода обусловлена тем, что во многих случаях наилучшее качество прогноза достигается на ансамблях, использующих деревья избыточной глубины. В этих случаях может оказаться оправданным обучить ансамбль деревьев меньшей глубины, используя более глубокую модель в качестве «учителя». Это позволяет, в частности оценить реальную «глубину» зависимостей между переменными в задаче, а также получать более наглядные визуализации решений. Также исследование даёт материал для понимания механизмов эффективности процедуры дистилляции знаний.

Результат опубликован в:

Nedel'ko, V.M. Distillation of Knowledge in Boosting Models // Pattern Recognit. Image Anal. 35, 313–318 (2025). https://doi.org/10.1134/S1054661825700221

* Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № FWNF-2022-0015 *Математические модели и методы анализа данных, распознавания образов, прогнозирования и аппроксимации*)

Разработан новый подход для полного восстановления полей упругих деформаций для односвязных объектов по значениям продольного лучевого преобразования. Рассмотрены постановки задач тензорной томографии, как в предположении отсутствия внешних нагрузок, так и при их наличии (н.с., к.ф.-м.н. Полякова Анна Петровна, с.н.с., к.ф.-м.н. Светов Иван Евгеньевич, лаборатория условно-корректных задач)

Исследовалась задача томографии упругих деформаций по Брэггу на основе визуализации передачи нейтронов с разрешением по энергии. Разработан новый подход для двумерных систем плоского напряжения и плоской деформации, при котором упругая деформация может быть восстановлена по значениям продольного лучевого преобразования. Важную роль при этом играет разложение симметричного тензорного поля ранга 2. Соленоидальная часть поля в восстанавливается с использованием формулы обращения, тогда как потенциальная часть может быть восстановлена с использованием закона Гука или конечно-элементной модели упругой системы. Показано, что потенциальная часть поля определяется одним потенциалом. В дальнейшем этот подход распространен для трехмерного случая. Более того, предполагается, что образцы могут подвергаться внешним нагрузкам в дополнение к внутреннему остаточному напряжению. Именно, метод обеспечивает полную реконструкцию общих полей упругих деформаций в односвязных объектах с однокомпонентной границей, в то время как предыдущие результаты включали другие требования, такие как отсутствие остаточных напряжений или нулевое сцепление с границей.

Результат опубликован в:

[1] Wensrich, C.M., Holman, S., Courdurier, M., Lionheart, W.R.B., Polyakova, A., Svetov, I. Direct inversion of the Longitudinal Ray Transform for 2D residual elastic strain fields. // Inverse Problems. 2024. Vol. 40, No 7. 075011. (25pp) DOI: 10.1088/1361-6420/ad52bb.

[2] Wensrich, C.M., Holman, S., Lionheart, W.R.B., Courdurier, M., Polyakova, A , Svetov, I., Doubikin, T. General Reconstruction of Elastic Strain Fields from their Longitudinal Ray Transform. // SIAM Journal on Applied Mathematics. 2025. Vol. 85, No 2. P. 945-960. DOI: 10.1137/24M1684852

*Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № FWNF-2022-0009 *Обратные задачи естествознания и задачи томографии*)

Разработан новый метод количественной диагностики в ядерной медицине (инж.-иссл. Нестерова А.В., лаборатория ИИ-технологий математического моделирования биологических, социально-экономических и экологических процессов с.н.с. Рузанкин П.С., лаборатория прикладных обратных задач, в.н.с. Денисова Н.В., ИТПМ СО РАН)

В работе предложен и исследован новый математический метод для повышения точности количественной однофотонной эмиссионной компьютерной томографии (ОФЭКТ/КТ). В его основе лежит усовершенствованный алгоритм решения обратной задачи реконструкции OSEM, применяющий методы регуляризации для подавления шумов и артефактов, что обеспечивает устойчивость решения и высокую точность оценок распределения радиофармпрепарата.

В частности, была установлена и количественно оценена фундаментальная закономерность: использование постфильтрации решения, необходимое для устойчивости реконструкции, приводит к систематическому занижению измеряемой активности в очагах диаметром менее 20 мм. Для преодоления этого ограничения разработан и верифицирован метод компенсации. Валидация этого метода была проведена с помощью математического моделирования процедуры ОФЭКТ/КТ и численных экспериментов с использованием цифрового двойника фантома NEMA IEC, что позволило в контролируемых условиях имитировать клинические сценарии.

Практическая ценность работы заключается в том, что новый метод позволяет на существующем клиническом оборудовании получать точные количественной оценки очагов поражений. Это открывает новые возможности для объективной диагностики, индивидуализированного планирования доз в радионуклидной терапии и достоверного мониторинга ответа на лечение, что в перспективе может быть интегрировано в рутинные клинические протоколы.

[1] Денисова Н. В., Нестерова А. В., Минин С. М., Анашбаев Ж. Ж., Усов В. Ю. Разработка программных средств математического имитационного моделирования на основе клинических данных и фантомных исследований для оценки перфузии головного мозга и повышения качества изображений при ОФЭКТ/КТ с 99mTc ГМПАО // Медицинская радиология и радиационная безопасность. — 2023. — Т. 68, № 6. — С. 106–117. (У2 Белого списка).

[2] Нестерова А. В., Денисова Н. В. «Подводные камни» на пути количественной оценки тяжести онкологических поражений в диагностической ядерной медицине // Журнал технической физики. — 2022. — Т. 92, № 7. — С. 1018–1027. (У1 Белого списка).

Результат опубликован в:

[3] **Нестерова А. В., Денисова Н. В., Минин С.М.**, Анашбаев Ж. Ж., Усов В. Ю. Определение поправочных коэффициентов при количественной оценке костных

патологических очагов методом гамма-эмиссионной томографии // Компьютерные исследования и моделирование. — 2025. — Т. 17, № 4. — С. 677–696. (У2 Белого списка).

[4] **Nesterova A.V., Denisova N.V., Ruzankin P.S.** Understanding edge artifacts of the OSEM algorithm in emission tomography // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. — 2025. (У2 Белого списка).

[5] **Нестерова А.В., Денисова Н.В., Рузанкин П.С.** Реализация метода компенсации систематических искажений решения обратной задачи для алгоритма OSEM в исследованиях ОФЭКТ. (В процессе регистрации).

* Работа А.В. Нестеровой выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № FWNF-2024-0002 *Обратные некорректные задачи и машинное обучение в биологических, социально-экономических и экологических процессах*)

Динамика социальных протестов с учетом общественной поддержки: математическое моделирование, обратные задачи, управление и теория игр среднего поля (г.н.с., д.ф.-м.н. Шишленин Максим Александрович, стажер-исследователь Глухов Антон Иосифович)

Уличные протесты являются обычной чертой человеческого общества на протяжении многих веков. Они часто выступают в качестве движущей силы социальных изменений, но также могут нарушить повседневную жизнь и привести к значительным экономическим потерям. Понимание факторов, которые могут повлиять на продолжительность уличных протестов и количество участников, является актуальной проблемой.

Разработана новая математическая модель динамики социальных движений на основе SIR моделей распространения эпидемий с учетом неоднородности поведения протестующих, влияние полиции и поддержки общества. Используя движение "Желтых жилетов" во Франции в 2018-2019 годах в качестве примера, показано, что разработанная модель хорошо согласуется со статистическими данными. Показано, что умеренное повышение эффективности действий полиции в определенные дни может оказать существенное влияние на интенсивность и продолжительность протестов. Разработана совмещённая математическая модель на основе теории игр среднего поля и модели социальных протестов, основанной на динамических системах. Модель апробирована на статистических данных социального движения во Франции в 2018–2019 гг. Полученные результаты открывают возможность для более эффективного управления протестами.

[1] Alsulami, A., Glukhov, A., Shishlenin, M., Petrovskii, S. Dynamical modelling of street protests using the Yellow Vest Movement and Khabarovsk as case studies. Scientific Reports. 2022, 12(1), 20447.

[2] Глухов А.И., Шишленин М.А. Программа идентификации математической модели динамики численности участников социальных движений по статистическим данным. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2023610145, 09.01.2023. Заявка № 2022685219 от 20.12.2022.

[3] Глухов А.И., Шишленин М.А. Программа моделирования динамики численности участников социальных движений. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2023610402, 10.01.2023. Заявка № 2022685183 от 20.12.2022.

[4] Глухов А.И., Шишленин М.А. Моделирование динамики социальных протестов на основе модели игры среднего поля. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2024660981, 15.05.2024. Заявка от 15.05.2024.

[5] Глухов А.И., Шишленин М.А. Обратная задача определения параметров динамики социальных протестов на основе модели игры среднего поля. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2024663094, 04.06.2024. Заявка от 30.05.2024.

[6] Глухов, А.И., Шишленин, М.А., Трусов, Н.В. Моделирование динамики социальных протестов: игры среднего поля и обратные задачи // Дифференциальные уравнения. 2025. 61 (6), 802-822.

Результат опубликован в:

[7] Petrovskii, S., **Shishlenin, M., Glukhov, A**. Understanding street protests: from a mathematical model to protest management // PloS One. 2025. 20 (4), e0319837.

* Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № FWNF-2024-0001 *Теория, методы и приложения обратных задач и статистического анализа*)

Физика элементарных частиц и фундаментальных взаимодействий

Выяснена общая структура амплитуды нарушающего изоспин распада $D_{s0}^*(2317)^+ \to D_s^+\pi^0$. Показано, что эффект нарушения изотопической инвариантности для $D_{s0}^*(2317)^+$- феномена во многом похож на хорошо известное пороговое явление смешивания $a_0(980)^0$- и $f_0(980)$-резонансов. (г.н.с., д.ф.-м.н. Ачасов Н.Н., в.н.с., д.ф.-м.н. Шестаков Г.Н., Лаборатория теоретической физики)

Для связанных каналов D^0K^+, D^+K^0, $D_s^+\eta$ и $D_s^+\pi^0$ построены -волновые амплитуды рассеяния, учитывающие смешивание изоскалярного резонанса $D_{s0}^*(2317)^+$ с нерезонансными амплитудами с изоспином $I = 1$. Используемый нами феноменологический подход позволяет достаточно просто выяснить общую структуру амплитуды нарушающего изоспин распада $D_{s0}^*(2317)^+ \to D_s^+\pi^0$. Мы показываем, что фаза этой амплитуды совпадает с фазой нерезонансной амплитуды $D_s^+\pi^0$-рассеяния в согласии с теоремой Ватсона. Её квадрат модуля, как и должно быть, определяет ширину резонансного пика в $D_s^+\pi^0$-канале. Учёт $\pi^0 - \eta$-смешивания во внутренних линиях до второго порядка включительно обеспечивает выполнение условия унитарности. Представленный анализ дополняет описание $D_{s0}^*(2317)^+ \to D_s^+\pi^0$-распада, основанное на многоканальной унитаризованной киральной теории возмущений. Полученные нами численные оценки для ширины $D_{s0}^*(2317)^+ \to D_s^+\pi^0$-распада не противоречат имеющимся в литературе.

Результат опубликован в:

Achasov, N.N., Shestakov, G.N. Phenomenological description of the $D_{s0}^*(2317) \to D_s\pi^0$ decay // Physical Review D: Particles and fields. 2025. V.112. P.096004. DOI: 10.1103/jwkb-3zl9

* Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № FWNF-2022-0021 *Квантовая теория поля и исследование физических процессов в рамках Стандартной модели и за её пределами*)